Dvanácté cvičení

21. prosince 2012

Pro permutace je užitečná operace konjugace $\pi\rho\pi^{-1}$. Pro ρ cyklus tvaru $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ máme $\pi\rho\pi^{-1} = (\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_k))$. Pokud je ρ součin disjunktních cyklů, funguje to podobně.

Pokud máme nagenerovat z permutací $\pi_1, \ldots, \pi_n$ grupu, snažíme se popsat, jaké všechny permutace dostaneme z $\pi_1, \ldots, \pi_n$ pomocí skládání permutací a braní inverzních permutací.

Příklad 1. Jak vypadá $\langle 1/2, 1/3 \rangle$ (podgrupa generovaná dvojicí prvků 1/2 a 1/3) v grupě:

a) $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, -, 0)$,

b) $\mathbb{Q}^\star = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$?

Příklad 2. Buď $\pi \in S_7$. Jak vypadá permutace $\pi(123)(45)\pi^{-1}$?

Příklad 3. Jsou permutace $(1, 2, 3)$ a $(1, 2, 4)$ konjugované v grupě S_4? Jsou konjugované v grupě A_4? (Tj. existuje v dané grupě permutace π, že platí $\pi(1, 2, 3)\pi^{-1} = (1, 2, 4)$?)

Příklad 4. Dokažte, že grupu S_n můžeme (pro $n \geq 2$) generovat pomocí množiny permutací

a) $\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$,

b) $\{(1, 2), (1, 2, 3, \ldots, n)\}$.

Příklad 5. Najděte všechny podgrupy grupy S_3. Může se vám hodit Lagrangeova věta: Pokud H je podgrupa grupy G, tak počet prvků H je dělitelem počtu prvků G.