Osmé cvičení

23. listopadu 2012

Zobrazení $a + bi \mapsto a^2 + b^2$ je euklidovská norma v $\mathbb{Z}[i]$; dělení se zbytkem funguje tak, že nejdříve spočteme podíl v $\mathbb{C}$, načež zaokrouhlíme na nejbližší prvek $\mathbb{Z}[i]$.

Obecná norma v $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (kde d není druhá mocnina celého čísla, aby to bylo zajímavé) je $N(a + \sqrt{d}b) = |a^2 - db^2|$. Pozor na to, že to už euklidovská norma být nemusí! Stále ale platí:

1. $N(xy) = N(x)N(y)$
2. Pokud $x|y$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, tak $N(x)|N(y)$ v $\mathbb{N}_0$.
3. Prvek x je invertibilní, právě když $N(x) = 1$.
4. Pokud $N(x)$ je prvočíslo, je x ireducibilní.

Zobrazení N je euklidovská norma mimo jiné v $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$ a v $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Příklad 1. Vydělte s zbytkem:

a) $5 : 1 + i$ v $\mathbb{Z}[i]$

b) $1 + 4\sqrt{2}i : 3 + \sqrt{2}i$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$

Příklad 2. Najděte největšího společného dělitele a Bézoutovy koeficienty v $\mathbb{Z}[i]$ pro:

a) 2, $1 + 3i$

b) $3i$, $2i + 1$

Příklad 3. Rozhodněte, zda jsou následující prvky ireducibilní. Pokud ne, rozložte je na součin ireducibilních prvků:

a) $3 + 4i$ v $\mathbb{Z}[i]$

b) 7 v $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

c) 7 v $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$

d) $25 - 27\sqrt{2}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

Příklad 4. Existuje v okruhu $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ prvek, který má dva různé rozklady na součin ireducibilních prvků?

Příklad 5. Najděte v okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ co nejvíc invertibilních prvků!