

Deváté cvičení

30. listopadu 2012

Bud' R komutativní okruh, $f \in R[x]$ polynom. Hodnota $r \in R$ je kořen f , pokud $f(r) = 0$. Víme, že pak $(x-r)|f$. Násobnost kořene r je maximální $n \in \mathbb{N}$, že $(x-r)^n|f$.

Obor $\mathbb{Z}[x]$ není euklidovský. NSD polynomů nad \mathbb{Z} můžeme počítat tak, že ho nejprve spočteme nad \mathbb{Q} a potom se vypořádáme se soudělností koeficientů podle Gaussova lemmatu.

Příklad 1. Spočtete NSD a NSN pro polynomy:

$$\begin{aligned}5x^3 + 15x^2 - 5x - 15 \\5x^3 + 20x^2 - 5x - 60.\end{aligned}$$

Úlohu řešte:

- a) v $\mathbb{Q}[x]$,
- b) v $\mathbb{Z}[x]$,
- c) v $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

Příklad 2. Najděte polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ takový, že f má stupeň 3, jednoduchý kořen 1, dvojnásobný kořen 3 a $f(2) = 4$.

Příklad 3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{Q}$ určete násobnost kořene -1 polynomu $x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Příklad 4. Pro polynom $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ nad okruhem R definujeme jeho algebraickou derivaci $Df = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$. Značme $D^k f$ k -tou derivaci f . Rádi bychom aby platilo, že r je k -násobný kořen f , právě když $f(r) = Df(r) = \dots = D^{k-1}f(r) = 0$ a $D^k f(r) \neq 0$. To je velmi často pravda, problémy nám dělají jenom okruhy nenulové charakteristiky:

- a) Spočtete pomocí derivací násobnost kořene 2 polynomu

$$x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 33x^2 + 12x + 68 \in \mathbb{Z}[x].$$

- b) Jak je to s násobností kořene 1 a hodnotami derivací polynomu $x^3 - 1$ nad \mathbb{Z}_3 ?