Úlohy pro kombinované studenty, první série

Toto je první série úloh pro studenty kombinovaného studia, kteří nemohou chodit na cvičení a psát písemky. Na zápočet potřebujete získat 60 procent bodů z domácích úkolů pro běžné studenty a 60 procent bodů ze dvou sérií úloh po 40 bodech (tj. minimálně 48 bodů celkem). Toto je první série, druhá se objeví na webu na přelomu roku.

Každý příklad je za 10 bodů. Snažte se vše podrobně zdůvodňovat a dokazovat (strhávám body za mezery v postupu). Můžete používat bez důkazu, jen s příslušným odkazem, poznatky z prváckých přednášek a ze skript k Algebře 1.

Úlohy můžete odevzdat osobně na cvičeních nebo pomocí e-mailu na adresu `alexak@atrey.karlin.mff.cuni.cz`. **Termín odevzdání: 12. ledna 2011**

Příklad 1 *Rozhodněte, zda následující dvojice množina plus binární operace tvoří grupoid, pologrupu, kvazigrupu, monoid nebo grupu (po doplnění vhodnou operací inverze):*

1. $\mathbb{R}$ *s operací* $x \star y = \min(x, y)$,
2. $\{0, 1\}$ *s operací* XOR, *tedy* $x \,\mathrm{XOR}\, y = 1$, *právě když* $x \neq y$,
3. *všechna slova z písmen* a, b *(ne nutně smysluplná; slovo je libovolná konečná posloupnost písmen* a, b*, přičemž prázdné slovo je také slovo) s operací skládání slov za sebe (tj. například* $aab \circ baba = aabbaba$*).*

Příklad 2 *Najděte grupu* G *takovou, že*

(a) *množina* $H = \{g \in G : g^2 = e\}$ *není podgrupa* G,

(b) *množina* $H = \{g \in G : g^3 = e\}$ *není podgrupa* G,

(c) *množina* $H = \{g \in G : \text{existuje } n \in \mathbb{N}, \text{ že } g^n = e\}$ *není podgrupa* G.

Symbolem e *vždy značíme jednotkový prvek* G.

Příklad 3 *Rozhodněte, které z následujících grup jsou navzájem isomorfní:* S_3, $GL(2, \mathbb{Z}_2)$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}$ *(poslední tři grupy bereme se sčítáním).*

Příklad 4 *Buď* G *grupa všech shodností roviny (prvky* G *jsou všechna zobrazení* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zachovávající vzdálenosti bodů; můžete bez důkazu používat, že* G *je generovaná množinou všech posunutí, otočení a zrcadlení roviny). Buď* H *grupa všech posunutí roviny. Dokažte, že* $H \trianglelefteq G$ *a že* G/H *je isomorfní grupě všech* A *matic* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$*, které splňují rovnost* $AA^T = E$.