

Úlohy pro kombinované studenty, druhá série

Toto je druhá série úloh pro studenty kombinovaného studia, kteří nemohou chodit na cvičení a psát písemky. Na zápočet potřebujete získat 60 procent bodů z domácích úkolů pro běžné studenty a 60 procent bodů ze dvou sérií úloh po 40 bodech (tj. minimálně 48 bodů celkem).

Každý příklad je za 10 bodů. Snažte se vše podrobně zdůvodňovat a dokazovat (strhávám body za mezery v postupu). Můžete používat bez důkazu, jen s příslušným odkazem, poznatky z prvních přednášek a ze skript k Algebře 1.

Úlohy můžete odevzdat osobně na cvičeních nebo pomocí e-mailu na adresu alexak@atrey.karlin.mff.cuni.cz. **Termín odevzdání: 12. ledna 2011**

Příklad 1 *Bud' R množina všech horních trojúhelníkových matic 3×3 nad tělesem reálných čísel s běžnými operacemi maticového sčítání, odčítání a násobení. Rozhodněte, zda R je:*

1. okruh
2. komutativní okruh
3. obor integrity.

Příklad 2 *Bud' R obor integrity, kde $0 \neq 1$. Dokažte, že pak*

1. $(a \neq 0, ab = ac) \Rightarrow b = c$.
2. Rovnice $x^2 = x$ má právě dvě řešení.

Příklad 3 *V okruhu $\mathbb{R}[x, y]$ (reálné polynomy v neurčitých x, y) najděte ideál, který není hlavní (tj. není generovaný jedním prvkem).*

Příklad 4 *Bud' R okruh. Pro L pravý R -modul značme $\text{Ann}(L) = \{r \in R : \forall l \in L, lr = 0\}$ (této množině se říká anihilátor). Bud' M, N pravé R -moduly. Popište množinu $\text{Ann}(M \times N)$, znáte-li $\text{Ann}(M)$ a $\text{Ann}(N)$. Součin modulů je definovaný v příkladu 2.63 ve skriptech.*