Cvičení 15. 12. 2011

Zobrazení $f : R \to S$ mezi okruhy je okruhový homomorfismus, pokud platí $f(r+s) = f(r) + f(s)$ a $f(rs) = f(r)f(s)$ a $f(1_R) = 1_S$. Jádro f je množina vzorů 0_S.

Podmnožina I okruhu R se nazývá *oboustranný ideál*, pokud platí:

1. I obsahuje prvek 0
2. I je uzavřená na sčítání a odčítání
3. Pokud $i \in I$, $r \in R$, tak $ir, ri \in I$ (I absorbuje násobení)

Oboustranné ideály jsou cosi jako "normální podgrupy pro okruhy". (Název ideál vznikl z pojmu "ideální číslo"; ideály byly objeveny v 19. století při studiu dělitelnosti.)

Příklad 1. Najděte všechny okruhové homomorfismy a určete jejich jádra:

1. $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$
2. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$

Příklad 2. Buď I (oboustranný) ideál okruhu R. Dokažte, že $I = R$, právě když $1 \in I$.

Příklad 3. Buď K těleso. Kolik má K oboustranných ideálů?

Příklad 4. Dokažte, že v $\mathbb{Z}$ platí $a|b \Leftrightarrow a\mathbb{Z} \supset b\mathbb{Z}$.

Příklad 5. Najděte všechny oboustranné ideály okruhů $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}, M_2(\mathbb{R})$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda tvoří oboustranný ideál:

1. Polynomy stupně aspoň 1 a nulový polynom v $\mathbb{Z}[x]$
2. Polynomy s kořenem π (včetně nulového polynomu) v $\mathbb{R}[x]$
3. Singulární matice v $M_n(\mathbb{R})$
4. Horní trojúhelníkové matice v $M_n(R)$

Příklad 7. Najděte zobrazení $f : R \to S$, kde R, S jsou okruhy a f splňuje $f(r+s) = f(r) + f(s)$ a $f(rs) = f(r)f(s)$, ale nikoli $f(1) = 1$.