Cvičení 22. 12. 2011

Pokud I je oboustranný ideál okruhu R, můžeme faktorizovat: Prvky faktorokruhu R/I jsou množiny $r+I$, kde $r \in R$ a máme opearace $(r+I)+(s+I) = (r+s)+I$ a $(r+I)(s+I) = rs+I$.

Značení: Pokud $q \in R$, tak značíme $qR = \{qs : q \in R\}$ (je to pravý ideál R generovaný prvkem q).

Platí 1. věta o isomorfismu: Pokud $f : R \to S$ je okruhový homomorfismus, tak $R/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$.

Pokud R je komutativní a pro každá $p, q \in R$ platí $pq = 0 \Rightarrow p = 0 \vee q = 0$ (tj. R je obor integrity), tak můžeme vytvořit klasické podílové těleso $Q_{cl}(R)$, jehož prvky budou „zlomky“ tvaru $\frac{a}{b}$ (zápis ve skriptech: (a, b)), kde $a \in R$, $b \in R \setminus \{0\}$ a platí pravidla analogická školnímu počítání se zlomky:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bd$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$
$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$
$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Příklad 1. Které z následujícíh okruhů jsou isomorfní?

$$\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}[x]/12\,\mathbb{Z}[x]$$

Příklad 2. Dokažte, že:

1. $\mathbb{R}[x]/(x+1)\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{C}$
3. $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{R}^2$ (Násobení v okruhu $\mathbb{R}^2$ funguje po složkách.)

Příklad 3. Rozhodněte, zda okruh $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+1)\mathbb{Z}_2[x]$ je těleso.

Příklad 4. Dokažte, že matice 2×2, jejichž prvky jsou sudá čísla, tvoří ideál v okruhu $M_2(\mathbb{Z})$. Dokažte, že příslušný faktorokruh je isomorfní $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Příklad 5. Buď R obor integrity. Napište inverzní prvek (na násobení) k prvku $\frac{a}{b} \in Q_{cl}(R)$, $a \neq 0$.

Příklad 6. Buď R obor integrity. Najděte prostý homomorfismus (vnoření) $R \to Q_{cl}(R)$.

Příklad 7. Popište $Q_{cl}(\mathbb{Z}[x])$.

Příklad 8. Buď K komutativní těleso. Popište $Q_{cl}(K)$.