Bonusové cvičení 12. 1. 2012

Algebra A nad tělesem K je okruh, který je zároveň vektorový prostor. Například matice nad $\mathbb{R}$ jsou algebra nad $\mathbb{R}$ (matici lze násobit číslem).

Algebra $\langle KG \rangle$ cest grafu G (Příklad 2.7 ze skript) má za svou bázi jako vektorový prostor všechny cesty v grafu G, tj. prvky jsou *formální lineární kominace cest*. Násobení odpovídá skládání cest za sebe, kde vychází 0, pokud skládání nedává smysl. Algebry cest jsou dobré jako (proti)příklady algeber (jsou pochopitelnější než úplně abstraktní algebry).

Ideál P okruhu R se nazývá *prvoideál*, pokud platí $pq \in P \Rightarrow p \in P \vee q \in P$ a $P \neq R$. Lokalizace R v prvoideálu P (značená $R_{(P)}$ je podílový okruh, kde „jmenovatelé zlomků" mohou být právě všechny prvky mimo P (Definice 2.35).

Příklad 1. Ověřte, že $\mathbb{R}[x]$ je algebra nad $\mathbb{R}$.

Příklad 2. Kterým známým algebrám jsou isomorfní algebry cest následujících grafů?

G G' G''

Příklad 3. Buď K těleso, G graf. Jak vypadá jednotkový prvek v $\langle KG \rangle$?

Příklad 4. Buď K těleso, G graf. Kdy má $\langle KG \rangle$ konečnou dimenzi jako vektorový prostor?

Příklad 5. Rozhodněte, zda je prvoideál:

1. $7\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$
2. $15\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$
3. $x\mathbb{R}[x]$ v $\mathbb{R}[x]$
4. $(x^2 + 1)\mathbb{C}[x]$ v $\mathbb{C}[x]$

Příklad 6. Buď $P = 13\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$.

1. Dokažte, že P je prvoideál.
2. V $\mathbb{Z}_{(P)}$ najděte všechny invertibilní prvky (tj. prvky, ke kterým existuje multiplikativní invers).

3. V $\mathbb{Z}_{(P)}$ najděte aspoň jedno řešení (různé od $(0,1),(1,0)$) rovnice $x^2+y^2=1$

4. Má v $\mathbb{Z}_{(P)}$ řešení rovnice $13x=5$?

Příklad 7. Buď $S=\{1,x,x^2,\dots\}$. Uvažme podílový okruh $\mathbb{R}[x]S^{-1}$ (racionální lomené funkce se jmenovatelem z S). Dokažte, že tento okruh je isomorfní okruhu Laurentových polynomů nad $\mathbb{R}$, tj. výrazů tvaru

$$\sum_{i=m}^{n} a_i x^i,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ a $m \le n \in \mathbb{Z}$ (tj. povolujeme i záporné exponenty) se sčítáním a násobením jako běžné algebraické výrazy.