Cvičení 20. 10. 2011

Příklad 1 (těžší opakování) *Buď p prvočíslo. Ověřte, že potom*

$$\mathbb{Z}_p^* = (\{1, \ldots, p-1\}, \cdot)$$

je grupa (zde násobení bereme modulo p).

Příklad 2 *Dokažte, že pokud f je zobrazení z grupy G do grupy H a platí $f(gh) = f(g)f(h)$ pro všechny $g, h \in G$, tak nutně $f(e_G) = e_H$ a $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.*

Příklad 3 *Rozhodněte, zda je podgrupa:*

1. $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$
2. $(\mathbb{R}^+, \cdot) \leq (\mathbb{R}, +)$
3. $(\mathbb{N}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$
4. $(\{A \text{ matice } n \times n \text{ s koeficienty v } \mathbb{R} : \det A = 1\}, \cdot) \leq GL(\mathbb{R}, n)$

Příklad 4 *Rozhodněte, zda je homomorfismus, najděte jeho jádro:*

1. $sgn : S_n \to \{\pm 1\}$
2. $det : GL(n, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
3. $f : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ *pro G obecnou grupu*
4. $g_h : G \to G, g \mapsto hgh^{-1}$ *pro G obecnou grupu a $h \in G$ pevně zvolený*
5. $s : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), n \mapsto n + 1$
6. $v_3 : (\mathbb{Q}^+, \cdot) \mapsto (\mathbb{Z}, +)$, *kde $v_3(a/b) = k - l$, kde k je maximální, že $3^k | a$ a l je maximální, že $3^l | b$.*

Příklad 5 *Buď G konečná grupa. Dokažte, že řád každého $g \in G$ dělí $|G|$.*

Příklad 6 *Najděte isomorfismus mezi grupami:*

1. $\mathbb{Z}_5^*$ *a* $\mathbb{Z}_4$
2. $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ *a* $(\mathbb{R}, +)$
3. *Grupa shodností trojúhelníka a S_3*
4. *Grupa otočení prostoru zachovávajících (pevně zvolenou) krychli a S_4*