

Cvičení 3. 11. 2011

Příklad 1. Existuje nekomutativní sedmiprvková grupa? A co nekomutativní grupa prvočíselného řádu?

Příklad 2 (Malá Fermatova věta). Buď p prvočíslo. Dokažte, že:

- Pro každé $x \in \mathbb{Z}_p^*$ je řád x dělí $p - 1$.
- Kdykoli p nedělí $k \in \mathbb{Z}$, tak platí $k^{p-1} = 1$.

Příklad 3. Najděte všechny homomorfismy $f : G \rightarrow H$, určete jejich jádra, spočítejte $[G : \text{Ker } f]$ a popište (tabulkou, isomorfismem) grupy $G/\text{Ker } f$:

- $G = \mathbb{Z}_5, H = \mathbb{Z}_8$
- $G = \mathbb{Z}, H = \mathbb{Z}_{10}$
- $G = H = \mathbb{Z}$

Příklad 4. Buď $G = \mathbb{Z}_6$. Popište G/H (tabulkou, isomorfismem), pokud:

- $H = \{0\}$
- $H = \{0, 3\}$
- $H = \{0, 2, 4\}$

Příklad 5. Buď $H \trianglelefteq G$. Definujme na G relaci \approx jako $g \approx h \Leftrightarrow gh^{-1} \in H$. Dokažte, že:

- \approx je ekvivalence,
- platí $h \in H \Rightarrow h \approx e_G$,
- pokud $h \approx g, h' \approx g'$, tak také $hh' \approx gg'$,
- pokud $h \approx g$, tak $h^{-1} \approx g^{-1}$.