

## Cvičení 10. 11. 2011

**Příklad 1.** Dokažte, že obraz homomorfismu  $f : H \rightarrow G$  nemusí být normální podgrupa  $G$ .

**Příklad 2.** Se kterou známou grupou je izomorfní grupa  $GL(n, \mathbb{Q})/SL(n, \mathbb{Q})$ ?

**Příklad 3.** Buď  $H \leq G$ . Definujme na  $G$  relaci  $\approx$  jako  $g \approx h \Leftrightarrow gh^{-1} \in H$ . Dokažte, že:

- $\approx$  je ekvivalence,
- platí  $h \in H \Rightarrow h \approx e_G$ ,
- pokud  $h \approx g, h' \approx g'$ , tak také  $hh' \approx gg'$ ,
- pokud  $h \approx g$ , tak  $h^{-1} \approx g^{-1}$ .

**Příklad 4.** Dokažte, že pro každé  $G, H$  je  $G \times H / (\{e_G\} \times H) \simeq G$ .

**Příklad 5.** Buďte  $a \in G, b \in H$ . Dokažte, že řád prvku  $(a, b)$  v  $G \times H$  je roven nejmenšímu společnému násobku řádu  $a$  v  $G$  a řádu  $b$  v  $H$ .

**Příklad 6.** Které z následujících dvojic grup jsou isomorfní?

- $\mathbb{Z}$  a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}_4$  a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Z}_6$  a  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$