Domácí úkol číslo 5

Buď $\mathcal{R} = (R, \oplus, \ominus, 0, \cdot, 1)$ množina s operacemi taková, že:

1. $0 \neq 1$
2. $(R, \oplus, \ominus, 0)$ je grupa (nemůžete ale předpokládat, že je komutativní)
3. $(R, \cdot, 1)$ je monoid
4. Pro všechny $a, b, c \in R$ platí distributivní zákony

$$(a \oplus b)c = ac \oplus bc$$
$$a(b \oplus c) = ab \oplus ac$$

Dokažte, že pak je nutně $\oplus$ komutativní, tedy $\mathcal{R}$ je okruh.

Řešení 1 *Chceme ukázat, že pro každé dva prvky $r, s \in R$ platí $r \oplus s = s \oplus r$. Uvažme tedy dva takové prvky (přinesl nám je nepřítel).*

Výraz $(r \oplus 1)(s \oplus 1)$ lze použitím distributivního zákona vyhodnotit dvěma způsoby. Buď jako

$$(r \oplus 1)(s \oplus 1) = r(s \oplus 1) \oplus 1(s \oplus 1) = rs \oplus r \oplus s \oplus 1,$$

nebo jako

$$(r \oplus 1)(s \oplus 1) = (r \oplus 1)s \oplus (r \oplus 1)1 = rs \oplus s \oplus r \oplus 1,$$

Tyto dva výrazy se musí rovnat:

$$rs \oplus r \oplus s \oplus 1 = rs \oplus s \oplus r \oplus 1$$

Protože R je na $\oplus$ grupa, můžeme na tuto rovnost zapůsobit zleva $\ominus rs$ a zprava $\ominus 1$, abychom dostali

$$r \oplus s = s \oplus r,$$

což jsme ale právě chtěli.