Druhá písemka II

Příklad 1. Najděte H normální podgrupu grupy $G = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}$ takovou, aby G/H byla isomorfní grupě $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Svůj postup podrobně zdůvodněte.

Řešení: Uvažme zobrazení $f : G \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, které dvojici $(m, n) \in G$ přiřadí dvojici $(m \pmod 3), n \pmod 3))$. Protože 9 je násobek 3 a kongruence jsou kompatibilině se sčítáním, je toto zobrazení dobře definované a je to homomorfismus. Navíc je f zobrazení na (pro každý prvek $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ najdu jeho vzor), tedy použitím 1. věty o isomorfismu pro grupy máme:

$$G/\operatorname{Ker} f \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

Grupa H ze zadání tedy bude jádro zobrazení f, tj. množina

$$\{(m, n) \in G : 3|m, 3|n\},$$

což lze přepsat jako $\{0, 3, 6\} \times 3\mathbb{Z}$.

Úlohu lze řešit i bez použití 1. věty o isomorfismu, pak je dobře zkusit ji řešit „po částech“: Najít $H_1 \trianglelefteq \mathbb{Z}_9$, že $\mathbb{Z}_9/H_1 \simeq \mathbb{Z}_3$ (bude $H_1 = \{0, 3, 6\}$) a $H_2 \trianglelefteq \mathbb{Z}$, že $\mathbb{Z}/H_2 \simeq \mathbb{Z}_3$ (bude $H_2 = 3\mathbb{Z}$), načež zvolíme $H = H_1 \times H_2$. Tento postup nemusí vždy vést k cíli, ale zde se vyplatí.

Naopak se nevyplatí volit $H = \{0\} \times \mathbb{Z}$, protože $\mathbb{Z}_9$ a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ nejsou isomorfní, ač mají stejný počet prvků.

Příklad 2. Kolik existuje navzájem neisomorfních grafů (neorientovaných) na čtyřech vrcholech, pokud povolíme smyčky (hrany se stejným počátkem a koncem)?

Řešení: Úlohu vyřešíme pomocí Burnsideova lemmatu. Uvažme akci S_4 na množině všech grafů (neorientovaných s možností smyček) na vrcholech $\{1, 2, 3, 4\}$, kde permutace permutují vrcholy. Potřebujeme určit počty pevných bodů různých permutací z S_4.

Pro permutace z S_4 máme několik možností:

1. Identita má za pevné body všechny grafy (těch je 2^{10}).
2. Jedna transpozice (takových je v S_4 celkem $\binom{4}{2} = 6$) má pevných bodů 2^7 (kreslete si obrázek!).
3. Dvě disjunktní transpozice (takové jsou tři) mají pevných bodů 2^6.

4. Trojcyklus (těch je osm) má pevných bodů 2^4.

5. Čtyřcyklus (rovněž šest) má pevných bodů 2^3.

Burnsideovo lemma tedy dává odpověď $\frac{1}{24}(2^{10}+6\cdot 2^7+3\cdot 2^6+8\cdot 2^4+6\cdot 2^3) = 90$.

Příklad 3. Pro G grupu značme $\Delta_G = \{(g,g) : g \in G\} \subset G \times G$. Rozhodněte, zda vždy platí:

1. Δ_G je podgrupa grupy $G \times G$.

2. Pokud $\Delta_G \trianglelefteq G \times G$, tak G je komutativní.

Řešení: Obě tvrzení platí. Abychom ukázali platnost prvního, stačí ověřit, že Δ_G je uzavřená na grupovou operaci (to je pravda, neboť $(g,g) \circ_{G\times G} (h,h) = (g \circ_G h, g \circ_G h))$ a na inverzní prvky (podobně: $(g,g)^{-1_{G\times G}} = (g^{-1_G}, g^{-1_G})$).

Abychom dokázali druhé tvrzení, ukážeme že $\forall g,h \in G$, $g \circ h = h \circ g$. Mějme tedy dva takové prvky g,h. Pakliže je $\Delta_G \trianglelefteq G \times G$, tak musí platit $(e,h)\Delta_G(e,h)^{-1} = \Delta_G$.

Speciálně $(e,h)(g,g)(e,h)^{-1} \in \Delta_G$. Ovšem $(e,h)(g,g)(e,h)^{-1} = (g, h^{-1}gh)$, takže aby tento prvek ležel v Δ_G, musí platit $g = h^{-1}gh$, což snadno upravíme na požadovanou rovnost $hg = gh$.