Bonusové cvičení 12. 1. 2012

Příklad 1. Ověřte, že $\mathbb{R}[x]$ je algebra nad $\mathbb{R}$.

Řešení: Pro $r \in \mathbb{R}$ definujeme $r \cdot (a_n x^n + \cdots + a_0)$ jako $r a_n x^n + \cdots + r a_0$ a ověříme axiomy algebry.

Příklad 2. Kterým známým algebrám jsou isomorfní algebry cest následujících grafů (nad $\mathbb{R}$)?

G $\quad$ G' $\quad$ G''

Řešení: První grafová algebra je jednodimenzionální vektorový prostor, jehož prvky můžeme psát jako av pro a probíhající $\mathbb{R}$. Násobení je přitom definované jako $(av) \cdot (bv) = (ab)v$, tedy snadno ověříme, že zobrazení $av \mapsto a$ je isomorfismus $\langle \mathbb{R}G \rangle$ s $\mathbb{R}$.

Prvky $\langle \mathbb{R}G' \rangle$ vypadají jako $au + bv$ a násobí se „po složkách“, tj. $(au + bv)(a'u + b'v) = aa'u + bb'v$. Proto bude fungovat isomorfismus $au + bv \mapsto (a, b)$ na algebru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s násobením po složkách.

Prvky $\langle \mathbb{R}G'' \rangle$ vypadají jako $au + bv + ce$ a vzorec pro násobení zní: $(au + bv + ce)(a'u + b'v + c'e) = aa'u + bb'v + (ac' + cb')e$. Vymyslet tady isomorfismus dá více práce, ale bude fungovat zobrazení do algebry horních trojúhelníkových matic, které prvku $au + bv + ce$ přiřadí matici $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Příklad 3. Buď K těleso, G graf. Jak vypadá jednotkový prvek v $\langle KG \rangle$?

Řešení: Buď $V(G)$ množina vrcholů G. Potom volme $j = \sum_{v \in V(G)} 1 \cdot v$. Z definice násobení se potom snadno ověří, že $j \cdot p = p \cdot j = p$ pro každou cestu v G, tedy i pro každou lineární kombinaci cest.

Příklad 4. Buď K těleso, G graf. Kdy má $\langle KG \rangle$ konečnou dimenzi jako vektorový prostor?

Řešení: Dimenze je rovna počtu cest, tedy konečná dimenze nastane právě když neexistuje v G orientovaný cyklus (který by bylo možné probíhat stále dokola).

Příklad 5. Rozhodněte, zda je prvoideál:

1. $7\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$
2. $15\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$
3. $x\mathbb{R}[x]$ v $\mathbb{R}[x]$
4. $(x^2+1)\mathbb{C}[x]$ v $\mathbb{C}[x]$

Řešení: Všechny uvažované množiny jsou ideály; zbývá tedy rozhodnout, zda platí $pq \in I \Rightarrow p \in I \vee q \in I$.

1. Je, protože 7 je prvočíslo a $7|pq$ implikuje $7|p$ nebo $7|q$.
2. Není, protože $3 \cdot 5 \in 15\mathbb{Z}$, ačkoli $3, 5 \notin 15\mathbb{Z}$.
3. Množina $x\mathbb{R}[x]$ je právě množina všech polynomů s nulovým absolutním členem. Pokud p, q jsou polynomy a pq má nulový absolutní člen, pak nutně aspoň jeden z p, q musí mít nulový absolutní člen.
4. Není prvoideál, neboť $(x-i)(x+i) = x^2+1 \in (x^2+1)\mathbb{C}[x]$, ačkoli $x \pm i$ neleží v $(x^2+1)\mathbb{C}[x]$.

Příklad 6. Buď $P = 13\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Z}$.

1. Dokažte, že P je prvoideál.
2. V $\mathbb{Z}_{(P)}$ najděte všechny invertibilní prvky (tj. prvky, ke kterým existuje multiplikativní invers).
3. V $\mathbb{Z}_{(P)}$ najděte aspoň jedno řešení (různé od $(0,1), (1,0)$) rovnice $x^2+y^2 = 1$
4. Má v $\mathbb{Z}_{(P)}$ řešení rovnice $13x = 5$?

Řešení:

1. Číslo 13 je prvočíslo, tedy $13|pq$ implikuje $13|p$ nebo $13|q$.
2. Okruh $\mathbb{Z}_{(P)}$ sestává ze zlomků, jejichž jmenovatel není dělitelný 13. Uvažme jeden takový zlomek $\frac{a}{b}$. Jak by mohl vypadat inverzní prvek? Rovnost $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = 1$ je z definice podílového okrhuhu splněna právě tehdy, když $ac = bd$.

   Pokud a není násobek 13, můžeme volit $c = b, d = a$ a dostat tak inverzní prvek $\frac{b}{a}$. Naopak pokud $a = 13e$, tak rovnost $ac = bd$ implikuje, že 13 dělí bd, tedy $13|d$. To je ale spor s definicí $\mathbb{Z}_{(P)}$, kde jmenovatelé nemohou být dělitelní 13.
3. $\mathbb{Z}_{(P)}$ je podokruh $\mathbb{Q}$, funguje tedy například řešení $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$. Naopak nefunguje (kvůli dělitelnosti jmenovatele 13) řešení $x = \frac{12}{13}, y = \frac{5}{13}$.

4. Nechť tato rovnice má řešení $x = \frac{a}{b}$. Potom $13\frac{a}{b} = 5$ implikuje $13a = 5b$, tedy nutně $13|b$. To je ale spor, protože $\frac{a}{b}$ má ležet v $\mathbb{Z}_{(P)}$. Rovnice tedy nemá řešení.

Příklad 7. Buď $S = \{1, x, x^2, \dots\}$. Uvažme podílový okruh $\mathbb{R}[x]S^{-1}$ (racionální lomené funkce se jmenovatelem z S). Dokažte, že tento okruh je isomorfní okruhu Laurentových polynomů nad $\mathbb{R}$, tj. výrazů tvaru

$$\sum_{i=m}^{n} a_i x^i,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ a $m \leq n \in \mathbb{Z}$ (tj. povolujeme i záporné exponenty) se sčítáním a násobením jako běžné algebraické výrazy.

Řešení: Označme $R = \mathbb{R}[x]S^{-1}$. Prvky R jsou racionální lomené funkce se jmenovatelem tvaru x^k. Uvažme zobrazení ϕ, které zlomku $\frac{a_l x^l + \cdots + a_0}{x^k}$ přiřadí Laurentův polynom

$$\frac{a_l x^l + \cdots + a_0}{x^k} = a_l x^{l-k} + \cdots + a_0 x^{-k}.$$

Toto zobrazení je dobře definované (výsledek se nezmění při rozšíření zlomku), prosté a na. Zobrazení ϕ také posílá jednotku na jednotku, nulu na nulu, zachovává součty i součiny (ověřit to poslední dá trochu práce s indexy). Proto je ϕ hledaný isomorfismus.