Cvičení 12. 1. 2012

Teorie kategorií je obecný jazyk matematiky (podobně jako teorie množin). Základní pojmy jsou objekty (puntíky) a morfismy (šipky). O morfismech víme, že je lze skládat, ale *morfismy nemusí být zobrazení*. Morfismy mohou být prostě abstraktní šipky. Definice kategorie viz skripta Definice 2.53.

Pojmy limity a kolimity v kategorii jsou (ač to tak na první pohled nevypadá) přirozené způsoby, jak z nějaké konfigurace objektů a morfismů dostat nový objekt, propojený pomocí dobrých morfismů s objekty původními. Přesná definice limity a kolimity viz skripta Definice 2.60.

Příklad 1. Ověřte, že axiomy teorie kategorií splňuje:

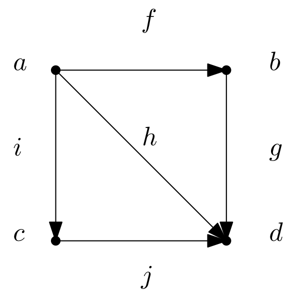
1. Kategorie grup s objekty grupami a morfismy grupovými homomorfismy.
2. Kategorie okruhů s objekty okruhy a morfismy okruhovými homomorfismy.
3. Kategorie množin s objekty množinami a morfismy zobrazeními.
4. Kategorie D s objekty přirozenými čísly a množinou morfismů z n do m jednoprvkovou pokud $n|m$ a prázdnou jinak.

Řešení:

1.–3. Přímočaré ověření definice ze skript (pokud nevíte, jaký je rozdíl mezi třídou a množinou, prostě si všude, kde se ve skriptech píše „třída“ představujte „množina“).

4. V zadání není specifikované skládání morfismů v kategorii D, ale z toho, že mezi libovolnou dvojicí objektů vede nejvýše jeden morfismus, už plyne, že skládání lze definovat pouze jedním způsobem. Z tranzitivity dělitelnosti plyne, že skládání vůbec lze definovat (tj. pokud $a \to b, b \to c$, tak také $a \to c$). Protože $n|n$ pro každé n, máme identické morfismy a ověřit axiomy kategorie už je pak přímočaré.

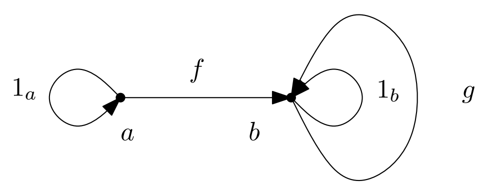
Příklad 2. Nechť trojúhelníky v následujícím diagramu komutují:



Dokažte, že pak komutuje i čtverec.

Řešení: To, že trojúhelníky komutují, znamená, že $g \circ f = h$ a $h = j \circ i$. Potom ale už nutně $g \circ f = j \circ i$, takže komutuje i čtverec.

Příklad 3. Napište tabulku skládání morfismů, aby věc na obrázku byla kategorie:



Řešení: Je potřeba skládání volit tak, aby operace $\circ$ respektovala axiomy o identických morfismech a asociativitě skládání. Některá skládání nebudou definovaná, protože nedávají smysl. Protože máme jen málo objektů a morfismů, stačí vyzkoušet všechny možnosti a ověřit, že výsledek splňuje axiomy kategorie. Jedno možné řešení pak je (první argument pro $\circ$ je v řádku, druhý ve sloupci):

$\circ$	1_a	1_b	f	g
1_a	1_a	X	X	X
1_b	X	1_b	f	g
f	f	X	X	X
g	X	g	f	1_b

Příklad 4. Buď K kategorie, A, B dva její objekty, $\rightarrow$ morfismus z A do B. Jak potom vypadá limita diagramu $A \rightarrow B$?

Řešení: Označme morfismus $A \rightarrow B$ ze zadání jako g. Definici limity vyhovuje v každé kategorii objekt A a dvojice morfismů 1_A a g. Přímočaře se ověří, že takto definovná limita splňuje vše, co definice limity požaduje.

Asi nejzajímavější je poslední podmínka z definice limity: Kdykoli nám přijde objekt L a dvojice morfismů $\alpha : L \rightarrow A$, $\beta : L \rightarrow B$, že $g \circ \alpha = \beta$, tak nám existuje právě jeden morfismus $\eta : L \rightarrow A$, že $1_A \eta = \alpha$ a $g \circ \eta = \beta$. Z první podmínky totiž musí být $\eta = \alpha$ a z vlastností L vidíme, že $g \circ \alpha = \beta$.

Příklad 5. V kategorii D z prvního příkladu popište součiny a kosoučiny.

Řešení: Součiny v D budou odpovídat největším společným dělitelům, kosoučiny nejmenším společným násobkům (morfismy z definice limity jsou jednoznačně určené díky tomu, že v D máme mezi každými dvěma objekty nejvýše jeden morfismus).

Kosoučiny přitom nemusí existovat pro nekonečné diskrétní diagramy. (V $\mathbb{N}$ nenajdeme například nejmenší společný násobek všech sudých čísel.)

Příklad 6. V kategorii modulů nad $\mathbb{Z}$ (tj. komutativních grup) najděte limitu diagramu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{f_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{f_2} \mathbb{Z} \xleftarrow{f_3} \mathbb{Z} \qquad \cdots$$

Zde morfismy f_i jsou zobrazení $f_i(n) = 2n$.

Jak na to: Nejprve zapomeňte na morfismy f_i a vyrobte součin $\mathbb{Z}$, potom najděte co největší podmodul tohoto součinu, aby vše komutovalo.

Řešení: Z obrázku se to možná nezdá, ale řetězec $\mathbb{Z}$ v zadání pokračuje donekonečna doprava (jsou tam tři tečky).

Uvažme jako „polotovar“ komutativní grupu G, jejíž prvky budou posloupnosti celých čísel s operací sčítání po složkách. To by spolu s projekcemi na i-tý prvek posloupnosti byla limita diskrétního diagramu (tj. diagramu bez zobrazení f_i). Nyní v G najdeme podgrupu sestávající ze všech posloupností $a_0, a_1, a_2, \ldots$ takových, že $f_i(a_i) = a_{i-1}$.

To je soustava rovnic $2a_i = a_{i-1}$, jejíž řešení jsou tvaru $a_i = \frac{a_0}{2^i}$, což ale v celých číslech lze realizovat pouze jako $a_i = 0$ pro všechny i. Jinak bychom totiž museli mít a_0 dělitelné libovolně vysokou mocninou 2.

Tvrdíme tedy, že limita zadaného diagramu je triviální grupa H s morfismy π_i, které přiřadí nulovému prvku H nulový prvek i-té kopie $\mathbb{Z}$. Nechť existuje jiný kandidát na limitu L se sadou morfismů $g_i : L \to \mathbb{Z}$, že $f_i \circ g_i = g_{i-1}$. Tvrdíme, že pak obrazy všech g_i musí být rovny $\{0\}$. Pokud by to byla pravda, tak zobrazení $\eta : L \to H$, které vše pošle na nulu, je hledané unikátní zobrazení, že $\pi_i \circ \eta = g_i$. Nechť nemáme pravdu a existuje $x \in L$ a index i, že $g_i(x) \neq 0$. Potom nutně

$$g_i(x) = 2g_{i+1}(x) = 4g_{i+2}(x) = \ldots,$$

tedy $g_i(x)$ je celé číslo dělitelné libovolně vysokou mocninou dvojky, spor.