Opakovací cvičení 10. 11. 2011

Příklad 1. Najděte všechny podgrupy:

1. S_3
2. $\mathbb{Z}_8$
3. $\mathbb{Z}_{13}$
4. S_4

Řešení:

1. Grupa S_3 sestává z identity, tří transpozic a dvou trojcyklů. Podgrupy S_3 generované jedním prvkem jsou: $\{\mathrm{id}\}$, $\{\mathrm{id}, (1,2)\}$ (plus 2 další možnosti symetricky) a $\{\mathrm{id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$. Pokud H podgrupa S_3 obsahuje prvek řádu 2 a řádu 3, musí mít z Lagrangeovy věty H řád aspoň 6, tedy $H = S_3$. Podobně pokud H obsahuje dva různé prvky řádu 2, tak musí mít řád sudé číslo větší než 2, které dělí 6, což lze jen tak, že $|H| = 6$. Proto nemáme žádné 2-generované podgrupy krom S_3.

2. Víme, že každé číslo nesoudělné s 8 (tj. liché) nám nageneruje celou grupu. Zbývá uvážit, co generují sudá čísla. Dostaneme podgrupy $\{0, 2, 4, 6\}$ a $\{0, 4\}$ a nic víc (krom všudypřítomné jednoprvkové a celé grupy).

3. Víme, že máme triviální podgrupu a celou grupu coby podgrupy. Uvažme teď prvek $g \neq 0$. Pak g generuje celou grupu, neboť řád g musí být dělitel 13 různý od 1. Tedy $g \in H$ implikuje $H = \mathbb{Z}_{13}$ a vidíme, že $\mathbb{Z}_{13}$ má pouze dvě podgrupy.

4. S_4 je poměrně velká. Postupným zkoumáním 1-generovaných a 2-generovaných grup (občas s použitím znalosti o tom, jak se konjugují permutace) dostaneme následující možnosti (krom jasných $\{\mathrm{id}\}$ a S_4):

   - 6 podgrup složených jen z identity a transpozice (isomorfních $\mathbb{Z}_2$)
   - 3 podgrupy tvaru $\{\mathrm{id}, (ij)(kl)\}$ (isomorfní $\mathbb{Z}_2$)
   - 4 podgrupy složené pouze z identity, trojcyklu a inverzního trojcyklu (isomorfní $\mathbb{Z}_3$)
   - 3 podgrupy generované čtyřcyklem (isomorfní $\mathbb{Z}_4$)

- 4 podgrupy složené z permutací s daným pevným bodem (isomorfní S_3)
- 3 osmiprvkové podgrupy (isomorfní grupě symetrií čtverce)
- Kleinovu podgrupu složenou z $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (normální podgrupa isomorfní $\mathbb{Z}_2^2$)
- 3 podgrupy tvaru $\{\mathrm{id}, (ij), (kl), (ij)(kl)\}$ pro i, j, k, l po dvou různá (isomorfní Kleinově grupě $\mathbb{Z}_2^2$)
- 1 alternující podgrupu složenou ze 12 sudých permutací (také normální podgrupa).

Žádná další podgrupa už se v S_4 nevyskytuje. Pokud by totiž existovala, musela by vzniknout tak, že k nějaké necyklické 2-generované podgrupě přidáme další prvek. Díky Lagrangeově větě víme, že přidáním čehokoli k osmiprvkové nebo dvanáctiprvkové podgrupě vytvoříme 24prvkovou podgrupu, tedy celé S_4. Zbývají čtyř- a šestiprvkové podgrupy.

Pokud ke grupě permutací s pevným bodem 4 přidáme permutaci π, co 4 nefixuje, nedá už moc práce vyrobit libovolnou permutaci „obložením“ π zleva i zprava vhodnými permutacemi na $\{1, 2, 3\}$.

U podgrup isomorfních $\mathbb{Z}_2^2$ nám rozbor možností dá, že přidáním dalšího prvku vznikne buď alternující grupa, kopie dihedrální grupy, nebo celá S_4, čili nic nového a důkaz je hotov.

Na analýzu konečných grup máme i silnější kanóny ve formě třídové rovnice a Sylowových vět, ale ty se ve druhácké algebře nevyskytují.

Příklad 2. Rozhodněte, zda je homomorfismus:

1. $f : (\mathbb{Q}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +); f(q) = q$
2. $g : GL(2, \mathbb{R}) \to GL(2, \mathbb{R}); g(A) = A^T$
3. $\omega : S_4 \to \mathbb{Z}_4; \omega(\pi) = \pi(1)$
4. $h : \mathbb{Z} \to GL(2, \mathbb{R}); h(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení:

1. Není, protože $1 + 1 = f(1) + f(1) \neq f(1 \cdot 1) = f(1) = 1$.
2. Není, protože obecně neplatí $(AB)^T = A^T B^T$ (protipříklad je téměř libovolná dvojice matic).
3. Není, protože například platí $\omega((13) \circ (12)) = 2 \neq 1 = \omega(13) + \omega(12)$.
4. Je, protože platí:

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Rozhodněte, zda S_{100} obsahuje podgrupu isomorfní:

1. S_3
2. $\mathbb{Z}_2$
3. $\mathbb{Z}_5$
4. $\mathbb{Z}$

Řešení:

1. S_3 lze vnořit do S_{100} dodefinováním $\pi(i) = i$ pro $i > 3$
2. Například $\{\mathrm{id}, (12)\}$.
3. Například podgrupa generovaná cyklem $(1, 2, 3, 4, 5)$.
4. Nejde, $\mathbb{Z}$ je nekonečná a řád S_{100} je konečný.

Příklad 4. Pro následující $H \leq G$ nakreslete levé a pravé rozkladové třídy G podle H a rozhodněte, zda je H normální:

1. $6\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$
2. $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} \leq \mathbb{Z}_24$
3. $\{id, (1, 2)(3, 4)\} \leq S_4$
4. $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^+\} \leq GL(2, \mathbb{R})$

Řešení:

1. Třídy jsou čísla dávající zbytek i po dělení 6, kde i probíhá množinu $0, 1, 2, 3, 4$ a 5. Podgrupa H je normální, protože G je komutativní.
2. Rozkladové třídy jsou: $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22\}$ a $\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$. Opět je H normální, protože G je komutativní.
3. Tříd je 12 levých a 12 pravých, obecně různých (čili nejde o normální podgrupu). Například permutace $(1, 3)$ patří do levé třídy $\{(1, 3), (1, 2, 3, 4)\}$ a do pravé třídy $\{(13), (1, 4, 3, 2)\}$.
4. Matice A patří do třídy $\{aA : a \in \mathbb{R}^+\}$, která je stejná levá i pravá (díky tomu, že diagonální matice komutuje se všemi ostatními). Podgrupa je tudíž normální.

Příklad 5. Pro následující $H \trianglelefteq G$ vypište rozkladové třídy G dle H, z každé třídy vyberte jednoho zástupce a na vzniklé množině zástupců Z definujte grupovou operaci $\circ$, aby $(Z, \circ)$ byla isomorfní G/H.

1. $A_3 \trianglelefteq S_3$
2. $\{\pm 1\} \trianglelefteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
3. $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{R}$
4. $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \trianglelefteq S_4$

Řešení:

1. Máme dvě třídy: A_3 a množinu všech lichých permutací. Vybereme-li zástupce id a $(1, 2)$ můžeme za grupovou operaci zvolit běžné skládání.
2. Máme pro každé $r \in \mathbb{R}^+$ třídu $\{-r, r\}$, vyberme zástupce $r > 0$ a za grupovou operaci berme běžné násobení.
3. Pro každé číslo $r \in [0, 1)$ máme třídu $r + \mathbb{Z}$, volme tedy r jako zástupce a za grupovou operaci můžeme zvolit sčítání „modulo 1",tedy bereme vždy desetinnou část součtu.
4. Značme podgrupu V (jako Vierergruppe, protože je to Kleinova grupa). Máme rozkladové třídy V,

$$
\begin{aligned}
&\{(12), (34), (1324), (1423)\},\\
&\{(13), (24), (1234), (1432)\},\\
&\{(14), (23), (1243), (1342)\},\\
&\{(123), (134), (142), (243)\},\\
&\{(132), (143), (124), (234)\}
\end{aligned}
$$

   Vyberu-li si zástupce id, $(12), (13), (23), (123), (132)$, tak si mohu ponechat skládání jako grupovou operaci a dostanu grupu isomorfní S_3. To je ale jenom dílo náhody, obecně *není* faktorgrupa isomorfní podgrupě grupy, z níž vzešla.