Úterý, skupina A

Jméno:

1. úloha *(4 body)*

Rozhodněte, zda pro všechna $n \geq 2$ přirozená platí $n! \leq 10^6 \cdot \binom{n}{2}$.

2. úloha *(4 body)*

Určete pomocí principu inkluze a exkluze, kolika způsoby můžeme za sebe napsat 26 písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z (každé právě jednou) tak, aby ve výsledné sekvenci nešlo vyškrtáním některých písmen najít ani jedno ze slov PATOK, KUN a KO. Například abecedně za sebou napsaná písmena neobsahují slova PATOK ani KUN, ale pokud vyškrtneme vše krom K a O, dostaneme zakázené slovo KO. Kombinační čísla a faktoriály ve výsledku nemusíte vyčíslovat.

3. úloha *(4 body)*

Nalezněte příklad částečně uspořádané množiny:

(a) $(X, \preceq)$ ve které existuje největší prvek, ale neexistuje žádný minimální prvek. (2 body)

(b) $(Y, \preceq')$ která obsahuje nekonečnou nezávislou podmnožinu i řetězec nekonečné délky. (2 body)

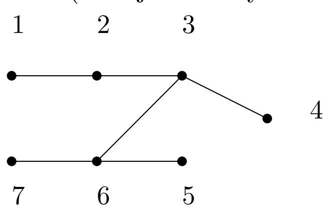
4. úloha *(4 body)*

Buď S graf definovaný takto

$$V(S) = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

$$E(S) = \{\{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, e\}, \{c, g\}\}.$$

Graf T máme zadaný obrázkem (čísla jsou názvy vrcholů):



(a) Rozhodněte, zda S je strom. (1 bod)

(b) Rozhodněte, zda T je strom. (1 bod)

(c) Rozhodněte, zda S a T jsou isomorfní (tj. najděte isomorfismus, nebo dokažte, že isomorfní nejsou). (2 body)

5. úloha *(4 body)*

Přehled za celý semestr. Stačí zakroužkovat správnou možnost. Nemusíte nic dokazovat ani zdůvodňovat. Vždy je právě jedna správná odpověď (a každá otázka je za bod).

(i) Buďte A, B, C tvrzení (pravdivá, či nepravdivá). Rozdodněte, která z následujících logických formulí **neplatí obecně**

(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(b) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(c) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge B \wedge C)$

(d) $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

(ii) Rozhodněte, který z následujících objektů je relace na množině $\{1, 2, 3\}$:

(a) $\{(1, 2), 3\}$

(b) $\{(1, 1), (2, 3)\}$

(c) $\{(1, 1), (2, 2), (4, 4)\}$

(d) $\{1, 2, 3\}$

(iii) Buď f zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované jako $f(x) = x^3$. Platí:

(a) f je prosté a na

(b) f je prosté, není na

(c) f je na, není prosté

(d) f není ani prosté, ani na

(iv) Buď X množina velikosti n. Počet k-prvkových podmnožin X je:

(a) n^k

(b) $\left(\frac{n}{k}\right)^k$

(c) $\binom{n}{k}$

(d) $\frac{n!}{k!}$

Úterý, skupina B

Jméno:

1. úloha *(4 body)*

Rozhodněte, zda pro všechna n přirozená platí $\binom{2n}{n} \geq \frac{(2n)!}{n^{2n}}$.

2. úloha *(4 body)*

Určete pomocí principu inkluze a exkluze, kolika způsoby můžeme za sebe napsat 26 písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z (každé právě jednou) tak, aby ve výsledné sekvenci nešlo vyškrtáním některých písmen najít ani jedno ze slov YAK, KOS a SAK. Například abecedně za sebou napsaná písmena neobsahují slova YAK ani SAK, ale pokud vyškrtneme vše krom K, O a S, dostaneme zakázené slovo KOS. Kombinační čísla a faktoriály ve výsledku nemusíte vyčíslovat.

3. úloha *(4 body)*

Nalezněte příklad částečně uspořádané množiny:

(a) $(X, \preceq)$ ve které neexistuje minimální ani maximální prvek. (2 body)

(b) $(Y, \preceq')$ v níž je číslo $\omega(Y, \preceq')$ (maximum délek řetězců) rovno 4 a číslo $\alpha(Y, \preceq')$ (maximum velikostí nezávislých podmnožin) rovno 2. (2 body)

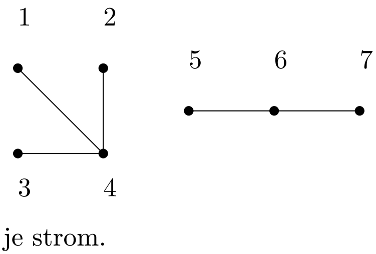
4. úloha *(4 body)*

Buď S graf definovaný takto

$$V(S) = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

$$E(S) = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, g\}\}.$$

Graf T máme zadaný obrázkem (čísla jsou názvy vrcholů):



(a) Rozhodněte, zda S je strom. (1 bod)

(b) Rozhodněte, zda T je strom. (1 bod)

(c) Rozhodněte, zda S a T jsou isomorfní (tj. najděte isomorfismus, nebo dokažte, že isomorfní nejsou). (2 body)

5. úloha *(4 body)*

Přehled za celý semestr. Stačí zakroužkovat správnou možnost. Nemusíte nic dokazovat ani zdůvodňovat. Vždy je právě jedna správná odpověď (a každá správná odpověď je za bod).

(i) Buďte A, B, C tvrzení (pravdivá, či nepravdivá). Rozdodněte, která z následujících logických formulí **neplatí obecně**

(a) $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(b) $B \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

(c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(d) $(A \vee B) \Rightarrow (A \vee B \vee C)$

(ii) Rozhodněte, který z následujících objektů je relace na množině $\{1, 2, 3\}$:

(a) $\{1, 2\}$

(b) $\{(1, 2), (3, 3)\}$

(c) $\{(1, 1), (2, 3, 2)\}$

(d) $\{(1, 1), (2, 2), (4, 4)\}$

(iii) Buď f zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované jako $f(x) = x^4$. Platí:

(a) f je prosté a na

(b) f je prosté, není na

(c) f je na, není prosté

(d) f není ani prosté, ani na

(iv) Buď X množina velikosti n. Počet všech podmnožin X je:

(a) n^2

(b) 2^n

(c) $\left(\frac{n}{2}\right)^n$

(d) $\binom{n}{2}$