Dnešní plán:

i) Vlastnosti funkcí
ii) Taylorův polynom

} II. zápočťák
2/4 otázek
u zkoušky

Tvrzení: 1 je největší přirozené číslo

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$ je největší přirozené číslo.

existence?

$$m := 2n - 1$$

$$m \leq n$$

$$2n - 1 \leq n$$

$$\boxed{n \leq 1}$$ podmínka nutná

$$\Rightarrow n = 1$$

QED.

extrémy funkce se hledají jako řešení

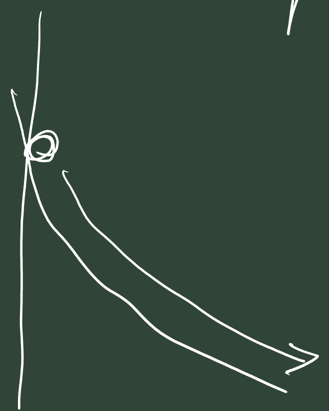
$$f'(x) = 0$$

podmínka nutná

NE POSTAČUJÍCÍ

Existence lok./glob. extrému je důležitá otázky

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$



Tvrzení: f je spojitá na $[a,b]$, tak f na $[a,b]$ nabývá maxima i minima

Nalezněte lok. extrémy

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

$27 - 54 + 27 - 4$

ostré

Def. Funkce f má v $a \in \mathbb{R}$ lok. maximum, jestliže $\exists \Delta > 0 : U(a, \Delta) \subset D_f$ a platí:

$$\forall x \in P(a, \Delta) : \quad f(x) \leq f(a)$$

$<$

f je spojitá na $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \quad x \in \mathbb{R}$$

řeším

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3\left(x^2 - 4x + \overbrace{3}^{(-3)\cdot(-1)}\right) = 0$$

$$f'(x) = 3(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 3$$

$\Rightarrow$ Jestliže f má v x lok. extrém, pak $x \in \{1, 3\}$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$-\infty \nearrow 0$	$0 \searrow -4$	$-4 \nearrow +\infty$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$-\infty \nearrow 0$	$0 \searrow -4$	$-4 \nearrow +\infty$

$\Rightarrow f(1) = 0$ je lokální maximum (ostré)

$f(3) = -4$ je lokální minimum (ostré)

f nemá globální extrém.

$$p(x) = x^6 - x^5 - 1$$

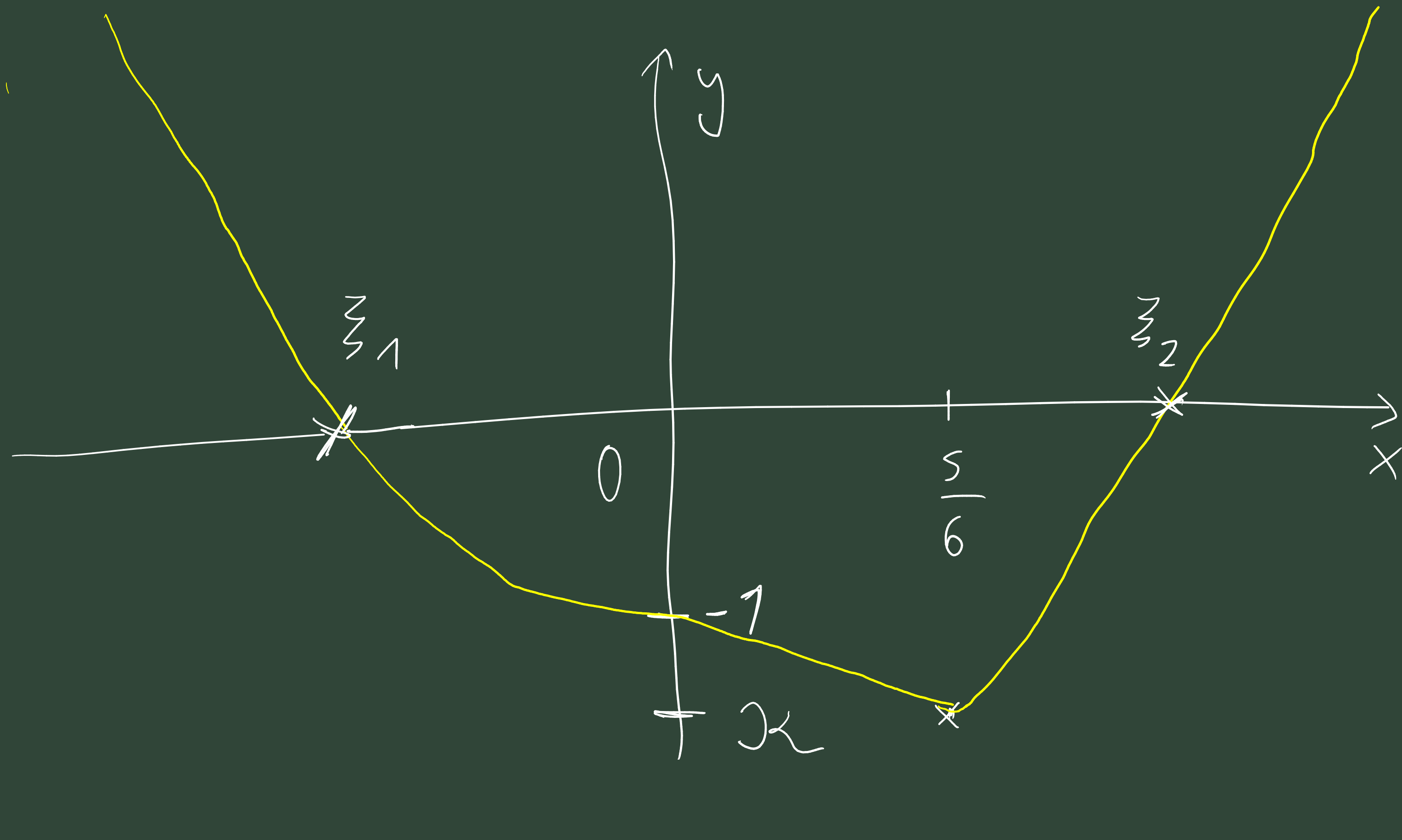
Kolik má p reálných kořenů?

$$p'(x) = 6x^5 - 5x^4$$
$$= 6x^4\left(x - \frac{5}{6}\right)$$

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$
p'	$-$	$-$	$+$
p	$+\infty \searrow -1$	$-1 \searrow K$	$K \nearrow +\infty$

$$p\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 - 1 =: K < -1$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{5}{6})$	$(\frac{5}{6}, +\infty)$
p'	$-$	$-$	$+$
p	$+\infty \searrow -1$	$-1 \searrow \alpha$	$\alpha \nearrow +\infty$



$\Rightarrow$ protože p je spojitá

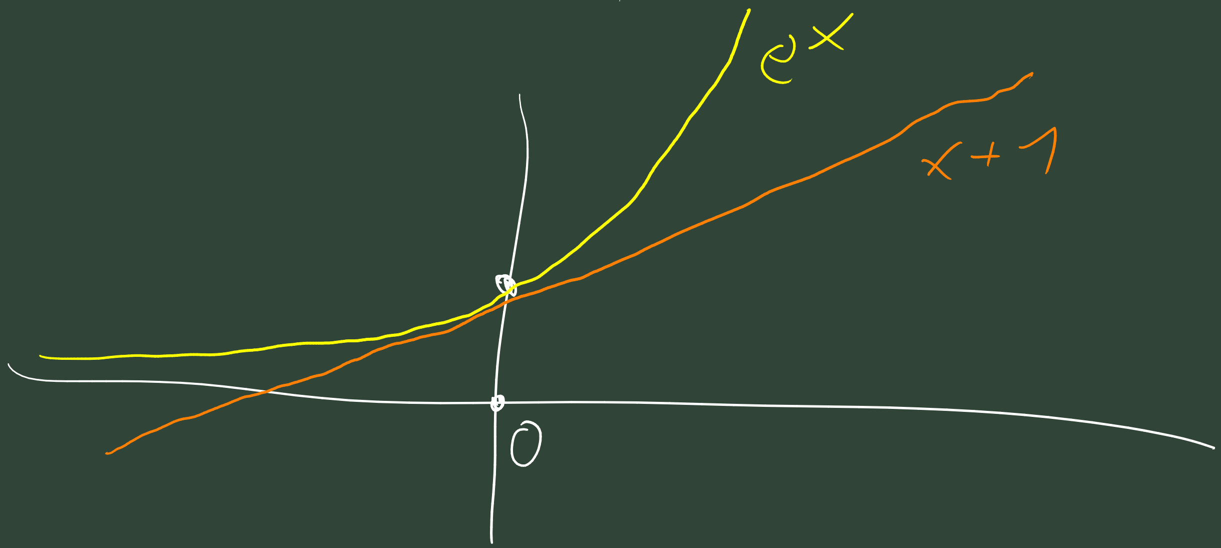
p má právě jeden v intervalu

$(-\infty, 0)$

a v intervalu $\left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$.

5. Dokažte nerovnost

$$e^x > x+1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$f(x) := e^x - x - 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

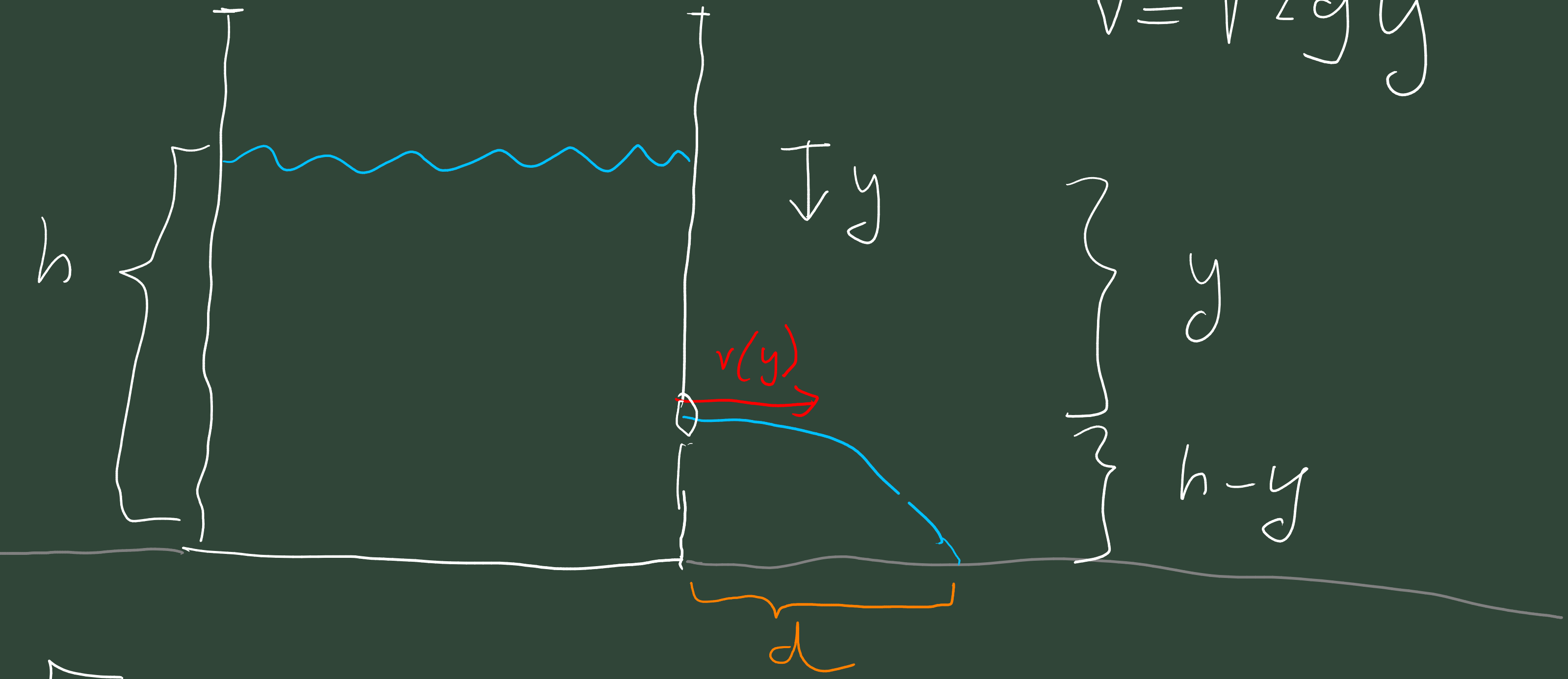
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
f'	$-$	$+$
f	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$

$\Rightarrow \quad 0 = f(0)$ je ostré glob. minimum

$\Rightarrow \quad f(x) > 0, \quad \forall x \neq 0$

(g)

$$v=\sqrt{2gy}$$



Za čas Δt

klesne potenciální energie v nádobě o

$$\Delta U = -\Delta m\, g\, h$$

energie vytékající vody je

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\, v^2 + \Delta m\, g\,(h-y)$$

$$\Delta U = -\Delta m\, g\, h$$

energie vytékající vody je

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\, v^2 + \Delta m\, g\,(h-y)$$

Předpoklad: zachování energie

$$0 = \Delta E + \Delta U = \frac{1}{2}\Delta m\, v^2 - \Delta m\, g y$$

$$g y = \frac{1}{2} v^2$$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{2 g y}}}$$

$$d = ?$$

$$h - y = \frac{1}{2} g \tau^2$$

τ je doba jak dlouho trvá kapce vody než dopadne na zem

$$d = v \cdot \tau$$

$$d(y) = \sqrt{2gy} \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{h-y}$$

$$4 \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} = h^2$$

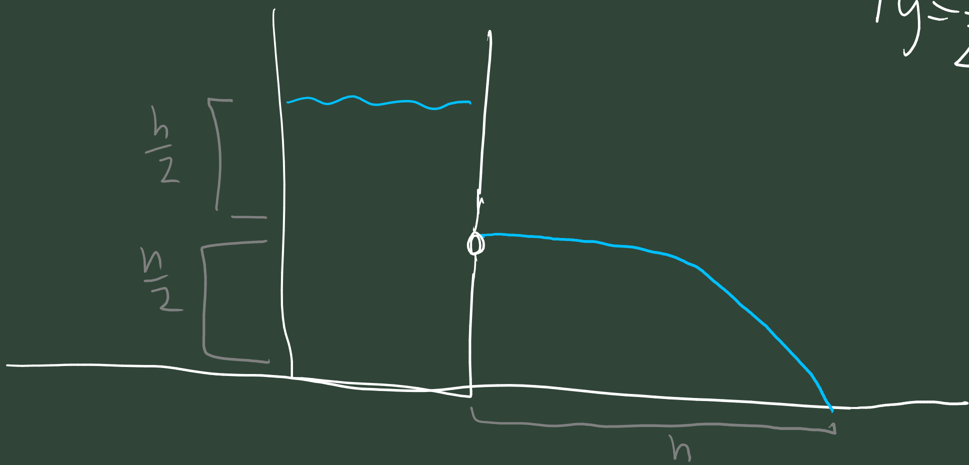
$$d^2 = 4 y (h-y), \quad y \in [0, h]$$

$$\frac{d\, d^2}{dy} = 4h - 8y = 8\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

$y = \frac{h}{2}$ je stac. bod

y	$[0, \frac{h}{2})$	$(\frac{h}{2}, h)$
d^2	$0 \nearrow h^2$	$h^2 \searrow 0$
$\frac{dd^2}{dy}$	$+$	$-$

$$\Rightarrow \max_{y \in [0, h]} d^{\cancel{2}} = h^{\cancel{2}} = d\Big|_{y=\frac{h}{2}}$$



Přestávka, pokrač. v 14:29

(8) Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = xe^{-\lambda x}$ na intervalu $(0, +\infty)$, kde $\lambda > 0$ je parametr.

$$f'(x) = e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}$$

$$= (1 - \lambda x)\underbrace{e^{-\lambda x}}_{>0}$$

$$f'(x) = e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}$$

$$= (1-\lambda x)\underbrace{e^{-\lambda x}}_{>0}$$

x	$(0, 1/\lambda)$	$(1/\lambda, +\infty)$
f'	$+$	$-$
f	$0 \nearrow \frac{1}{\lambda e}$	$\frac{1}{\lambda e} \searrow 0$

$$f(x) = x e^{-\lambda x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

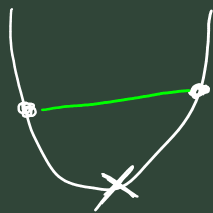
$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} e^{-1} = \frac{1}{\lambda e}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = 0$$

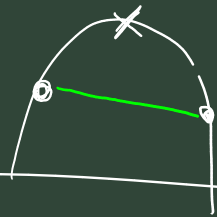
$$Hf = \left(0, \frac{1}{\lambda e}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \inf f &= 0 \\ \sup f &= \frac{1}{\lambda e} = \max f \end{aligned}}$$

KONVEXNÍ



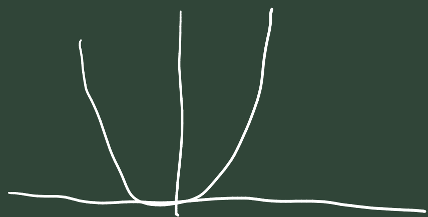
KONKÁVNÍ



když $f'' \geq 0$ ($\leq$) na I ← interval

pak F je ryze konvexní na I

ryze konkávní



$f(x) = x^2$

$f'' = 2 > 0$

Př. $f(x) = e^{-x^2}, \; x \in \mathbb{R}$

Vyšetřete konvexitu / konkavitu.

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$
$$= -2x e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$$
$$= 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$$

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$$

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$
f''	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$0 \nearrow e^{-1/2}$ $\cup$	$e^{-1/2} \nearrow 1$ $\cap$	$1 \searrow e^{-1/2}$ $\cap$	$e^{-1/2} \searrow 0$ $\cup$

$f(x) = e^{-x^2}$ $\leftarrow$

sudá

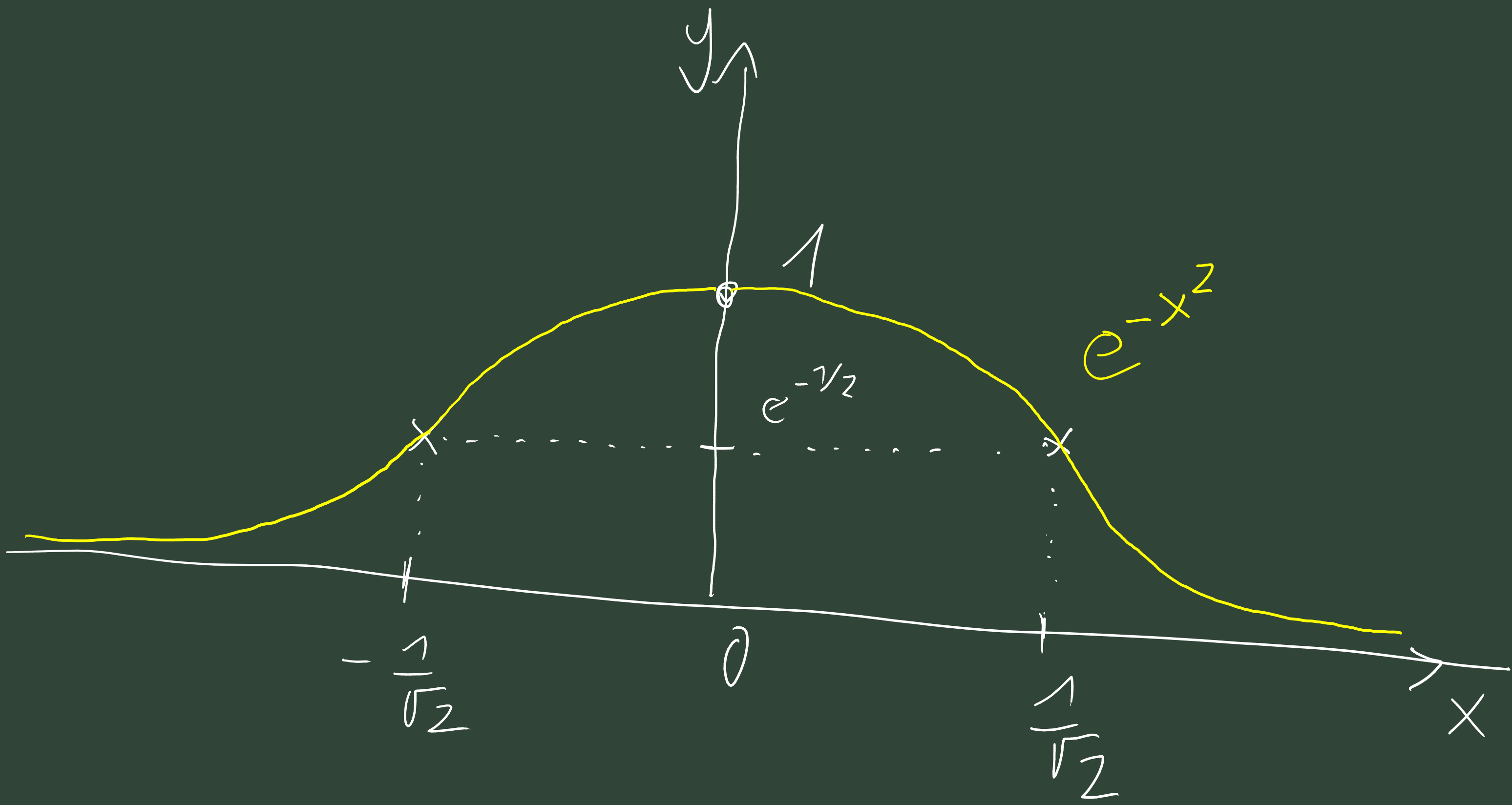
kladná

Funkce f je konkávní na $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

konvexní na $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

a na $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

body $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní



Taylorův polynom

Nechť f je funkce a nechť je definovaná na okolí nějakého $a \in \mathbb{R}$ a existují derivace

$$f^{(k)}(a) \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, n$$

potom Taylorův polynom n-tého řádu v bodě a je

$$T^n_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$f = \sin x$

$$T^{2n+1}_{f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$f(x) = T^{n}_{f,a}(x) + o\left((x-a)^n\right)$$

Tj.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^{n}_{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

<u>Pr.</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = ?$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{\underbrace{4!}_{24}} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{1!\,2} + \frac{x^4}{2!\cdot 4} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) + \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^4}}_{=0}$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{2}{24} = \underline{\underline{-\frac{1}{12}}}$$

6. ledna ← II. zápočťák

1 příklad Taylor

1 příklad průběh funkce