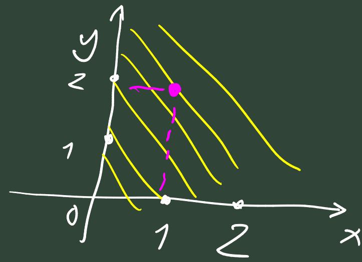
1) $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

$y(1) = 2$



A) Bernoulliova rovnice $\left(y' + a(x)y = b(x)\, y^{\alpha} \right)$

$y y' = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y^2}{x}\right)$, sub. $z = y^2$

$\cancel{\frac{1}{2}} z' = \cancel{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{z}{x}\right) \quad \Big| \cdot \frac{1}{x}$

$\left(\frac{z}{x}\right)' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = 1$

$\frac{z}{x} = x + C$

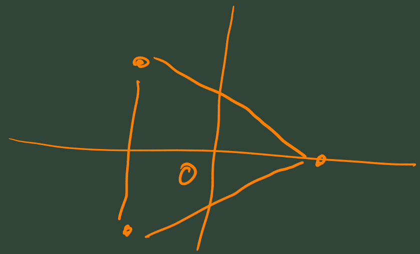
$y^2 = x(x+C)$

chci $2^2 = 1(1+C) \rightarrow C = 3$

$\rightarrow \boxed{y = \sqrt{x(x+3)},\ x > 0}$

2)

$$y''' = xe^x + y$$



$$y''' - y = xe^x$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = (\lambda-1)\left(\lambda - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\cdot\left(\lambda - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

komplexní FS : $e^x,\ \exp\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x\right),\ \exp\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x\right)$

reálný FS : $e^x,\ e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$$y_p = e^x z$$

$$p(\lambda+1) = (\lambda+1)^3 - 1 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda$$

$$z''' + 3z'' + 3z' = x$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}z\right) = e^{\lambda x}\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)z$$

$$\rightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(e^{\lambda x}z\right) = e^{\lambda x}\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)^n z$$

$$\rightarrow P\left(\frac{d}{dx}\right)\left[e^{\lambda x}z\right] = e^{\lambda x}\, P\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)[z]$$

$$\rightarrow \quad z' = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3}$$

$$y_p = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{3}\right)e^x$$

obecné reálné řešení $= \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{3}\right)e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$$y^{IV} - 2y'' + y = (\cos x) f(x)$$
$$= \mathrm{Re}\left[e^{ix} f(x) \right]$$

Místo tohoto vyřeším

$$u^{IV} - 2u'' + u = e^{ix} f(x)$$

a následně položíme $y = \mathrm{Re}\, u$

použiju sub.

$$u = e^{ix} z \quad \not\Rightarrow \quad y = \mathrm{Re}\, u = \cos x \; z$$
$$\longrightarrow \quad y = \cos x \cdot \mathrm{Re}\, z - \sin x \cdot \mathrm{Im}\, z$$

kde z řeší

$$p\left(\frac{d}{dx} + i\right) z = f$$

---

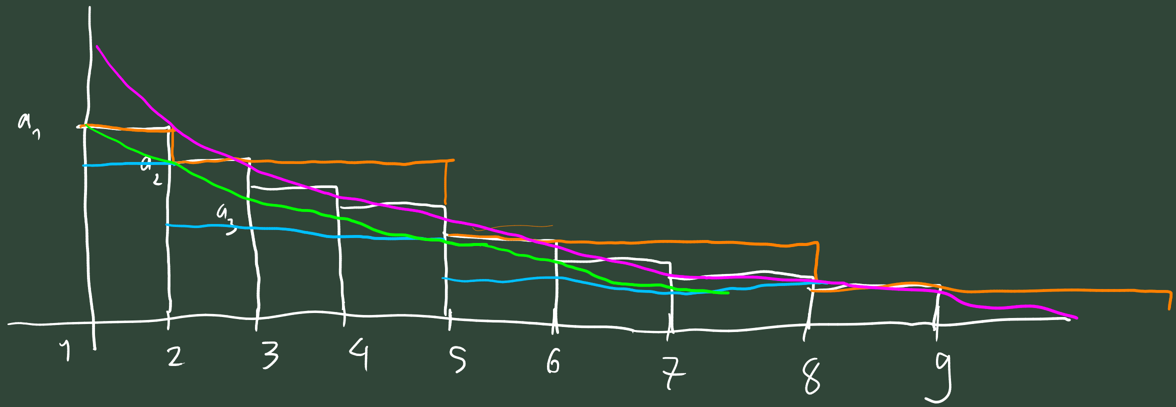
1) Konvergence kladných řad s nerostoucími členy

Situace: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$

A) kondenzační kritérium

za předpokladu výše platí: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; K \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \; K$

Idea:



B) Integrální kritérium

$0 \le a_n = f(n)$, $f: [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, f je nerostoucí

Potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad K \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \quad K$$

Př. $\boxed{5/18}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

pro $p \le 0$, $q = -p \ge 0$, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln n)^q}{n} \ge \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$\Rightarrow$ pro $p \le 0$ řada diverguje dle srovnávacího krit.

Pro $p > 0$, $a_n = \frac{1}{n \ln^p n} \searrow 0$

A) Můžu použít kondenzační kritérium:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \; K \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln^p 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln 2)^p}$$

$$\dots \quad K \iff p > 1$$

B) můžu použít integrální kritérium:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \; K \iff \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} \; K$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \left| \begin{matrix} \text{sub.} \\ \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p} \; K \iff p > 1$$

8)

$$Ř = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$$

Triviální $\quad a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \to 0$

kondenzační krit:

$$Ř \; K \iff \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln 2^n)^{(\ln 2^n)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n \ln 2)^{(n \ln 2)}} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{(n \ln 2)^{\ln 2}} \right)^n,$$

odmocninové kritérium:

$$q = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{(n \ln 2)^{\ln 2}} = 0 < 1$$

$\rightarrow$ řada konverguje dle odmocninového kritéria

$\boxed{\text{Přestávka 10 min}}$ (pokrač. v 12:52)

Číselné řady s obecnými členy

(řady, kde se "mění znaménka")

např. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

* Tvrzení: Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (AK)

6/1) $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$

$$|a_n| = \left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| = \frac{|\sin nx|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{AK}$$

Existují však neabsolutně konvergentní řady (NAK)

Př. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{\sin nx}{n}$, $\sum \frac{\cos nx}{n}$

A) <u>Leibnizovo kritérium</u>

Nechť $a_n \geq 0$, $\boxed{a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots}$

a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Big\}\ a_n \searrow 0$

Potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje

B) <u>Dirichletovo / Abelovo kritérium</u>

Uvažujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

kde $a_n \geq 0$ a $\boxed{a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots}$

Platí:

$\boxed{(D)}$ $a_n \to 0$, $\sum\limits_{n=1}^{M} b_n$ jsou omezené $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ K

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ K

(17) $Ř = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, $0 < x < \pi$

- $|a_n| = \frac{|\sin nx|}{n^p} \le \frac{1}{n^p} \Rightarrow Ř$ je AK pro $p > 1$

- Pro $p \le 0$: $a_n = (\sin nx)\, n^{|p|}$ nesplněna je nutná podmínka konvergence

$\Rightarrow$ Ř je D pro $p \le 0$

- Zbývá vyřešit $p \in (0, 1]$

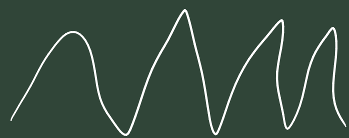
Konverguje absolutně?

$$|a_n| = \frac{|\sin nx|}{n^p}$$

$$\max\left(|\sin nx|, |\sin (n+1)x|\right) \ge c$$

$\Rightarrow$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje

- Nechť $p \in (0, 1]$



Chci použít Dirichletovo kritérium

Otázka: má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ omezené částečné součty?

△ : řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$

mají pro $x \neq 2k\pi$ omezené částečné

součty

$$\sum_{n=1}^{M} \sin nx = \operatorname{Im}\left[\sum_{n=1}^{M} e^{inx}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{M} \cos nx = \operatorname{Re}\left[\sum_{n=1}^{M} e^{inx}\right]$$

a platí:
$$\left|\sum_{n=1}^{M} e^{inx}\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{M} e^{inx}\right| \leq \left|\frac{e^{i(M+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}\right|$$

$$\leq \frac{|e^{i(M+1)x}| + 1}{|e^{ix} - 1|} \leq \frac{2}{|e^{ix} - 1|} < +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sum_{n=1}^{M} \sin nx\right| \leq \frac{2}{|e^{ix} - 1|}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sum_{n=1}^{M} \cos nx\right| \leq \frac{2}{|e^{ix} - 1|}$$

Zpátky k příkladu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \qquad x \in (0, \pi), \quad p \in (0, 1]$$

Víme: • $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené část. součty

• $\frac{1}{n^p} \searrow 0$

$\xrightarrow{D}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ konverguje (NAK)

Patologické vlastnosti NAK řad

• nejsou invariantní vůči "přezávorkování"

$$Ř = 1-1+1-1+1-1+1-\dots$$

$$Ř \neq (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$$
$$= 0+0+0+0+\dots = 0$$

• nejsou invariantní vůči permutaci členů

$$2+1 = 1+2$$

Je-li $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutace (vzájemně jednoznačné zobrazení)

Pak obecně

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$$

Nekonečný homogenní vesmír podle Newtona.

Pro každou galaxii

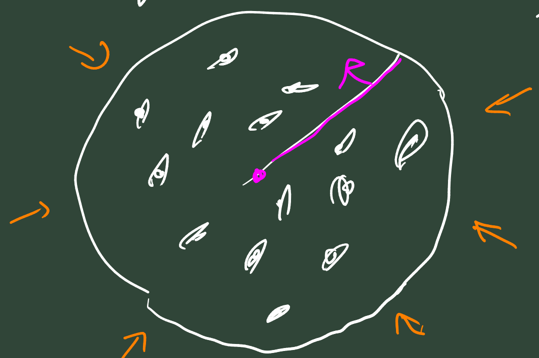
$$\vec{F}_a = \text{celková síla působící na galaxii } a$$

$$= \sum_{b \neq a} \frac{G\, m^2}{r_{ab}^2} \hat{r}_{ab} = ?$$

- Newtonova idea: pro každou galaxii a neexistuje žádný preferovaný směr

$$\Rightarrow \vec{F}_a = 0 \,, \forall a$$

- Jiná idea: Podívejme se na galaxie v kouli $B(0,R)$



Zřejmě galaxie se přitahují do středu

Ale: přidání sférické homogenní vrstvy nezmění gravitační pole uvnitř

$\longrightarrow$ vesmír se bude kontrahovat

Důvod proč to vychází vážně:

řada $\sum_{a \neq b} \frac{Gm^2}{r_{ab}^2}$ není absolutně konv.

$$\sum_{a \neq b} \frac{Gm^2}{r_{ab}^2} = G.m^2 \sum_{R=1}^{\infty} \frac{1}{R^2} \cdot \left(\text{počet galaxií ve vrstvě } R \right)$$

$\sim R^2$