

### 3 Numerické řešení transportní rovnice

V této části se budeme zabývat numerickým řešením Cauchyovy úlohy pro transportní rovnici v jedné prostorové dimenzi, tj. úlohy

$$(26) \quad u_t + a u_x = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

$$(27) \quad u(x, 0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pro neznámou funkci  $u = u(x, t)$  závisující na prostorové proměnné  $x \in \mathbb{R}$  a časové proměnné  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Funkce  $u^0$  je daná počáteční podmínka a koeficient  $a$  je rychlost šíření veličiny  $u$ . Náš hlavní zájem bude patřit rovnici (26) s konstantním koeficientem  $a$ , avšak v některých případech budeme uvažovat též rovnici (26) s nenulovou pravou stranou či s nekonztantním koeficientem  $a$ .

Je známo, že řešení rovnice (26) jsou konstantní podél charakteristik, což jsou křivky  $x = x(t)$  splňující  $x'(t) = a(x(t), t)$ . Je-li funkce  $a$  Lipschitzovská v  $x$  a spojitá v  $t$ , charakteristiky se neprotínají. Jejich sestavením tedy získáme řešení dané vztahem  $u(x(t), t) = u^0(x(0))$ . Je-li  $a$  konstantní, pak charakteristiky jsou určeny rovnicí  $x - at = \text{konst.}$  Jsou to tedy rovnoběžné přímky v rovině  $(x, t)$  se směrnici  $1/a$ . Z toho plyne, že pro  $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$  a konstantní  $a$  má úloha (26), (27) právě jedno klasické řešení, které je dáno vztahem

$$(28) \quad u(x, t) = u^0(x - at).$$

Vidíme tedy, že řešení  $u$  v čase  $t$  je rovno počáteční podmínce  $u^0$  posunuté o vzdálenost  $|a|t$  (doprava pro  $a > 0$ , doleva pro  $a < 0$ ). Parametr  $a$  se nazývá rychlost šíření podél charakteristik. Řešení  $u$  lze tak považovat za vlnu šířící se rychlostí  $a$  beze změny tvaru. Proto se rovnice (26) také nazývá *jednosměrná vlnová rovnice*.

Samozřejmě vyvstává otázka, proč se zabývat numerickým řešením úlohy (26), (27), když je její řešení známo. Důvodem je to, že u komplikovanějších úloh, v nichž hrají důležitou roli transportní mechanismy, již řešení zpravidla nejsme schopni v analytickém tvaru získat a musíme ho aproximovat pomocí numerických metod. Přitom navržením vhodné metody není vůbec triviální a řada potíží, s nimiž se setkáváme, se vyskytuje již při numerickém řešení rovnice (26). Abychom příslušné jevy lépe pochopili, je rozumné je studovat na co nejjednodušší úloze, a proto uvažujeme rovnici (26). U metod, které se ukáží jako nevhodné pro řešení rovnice (26), nelze samozřejmě očekávat, že by dávaly dobré výsledky pro komplikovanější úlohy.

#### 3.1 Příklady numerických schémat

Opět budeme uvažovat rovnoměrnou síť s konstantním prostorovým krokem  $h$  a konstantním časovým krokem  $\tau$  a definujeme uzly sítě  $(x_j, t_n)$ , kde  $x_j = jh$ ,  $t_n = n\tau$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  a  $n \in \mathbb{N}_0$ . Řešení  $u$  Cauchyovy úlohy (26), (27) opět aproximujeme v uzlech  $(x_j, t_n)$  hodnotami  $U_j^n$ . Rovnici (26) aproximujeme v libovolném uzlu  $(x_j, t_n)$  diferenčním schématem získaným nahrazením parciálních derivací diferenčními kvocienty. Takto lze získat mnoho rozličných numerických schémat, z nichž několik nyní uvedeme. Pro jejich přehlednější zápis budeme užívat parametr  $\nu = a\tau/h$ , který jsme zavedli již v části věnované von Neumannově analýze stability.

Pro numerické řešení rovnice (26) lze uvažovat například schémata:

$$(29) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} = 0, \quad \text{tj.} \quad U_j^{n+1} = (1 + \nu) U_j^n - \nu U_{j+1}^n,$$

$$(30) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \text{tj.} \quad U_j^{n+1} = \nu U_{j-1}^n + (1 - \nu) U_j^n,$$

$$(31) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad \text{tj.} \quad U_j^{n+1} = \frac{\nu}{2} U_{j-1}^n + U_j^n - \frac{\nu}{2} U_{j+1}^n,$$

$$(32) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\tau} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad \text{tj.} \quad U_j^{n+1} = U_j^{n-1} + \nu U_{j-1}^n - \nu U_{j+1}^n,$$

$$(33) \quad \frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad \text{tj.} \\ U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \nu) U_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1 - \nu) U_{j+1}^n.$$

Všechna uvedená schémata jsou explicitní. Schéma (32) je známo pod označením *leapfrog scheme*. K určení přibližného řešení na nové časové vrstvě využívá toto schéma hodnot přibližného řešení z předcházejících dvou časových vrstev. Hovoříme proto o *dvoukrokovém* schématu. Ostatní schémata jsou jednokroková. Schéma (33) se nazývá Laxovo–Friedrichsovo schéma. Všimněme si, že

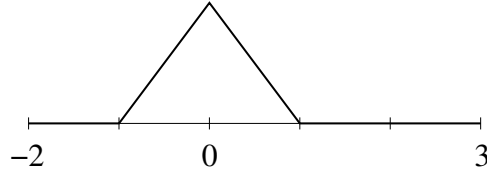
$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}.$$

Jelikož diferenční kvocient  $(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)/h^2$  reprezentuje aproximaci  $u_{xx}(x_j, t_n)$ , lze tedy speciální aproximaci časové derivace použitou v (33) interpretovat jako přidání umělé difúze o velikosti  $h^2/(2\tau)$  ke schématu (31). Laxovo–Friedrichsovo schéma tedy odpovídá diskretizaci rovnice

$$u_t - \frac{h^2}{2\tau} u_{xx} + a u_x = 0$$

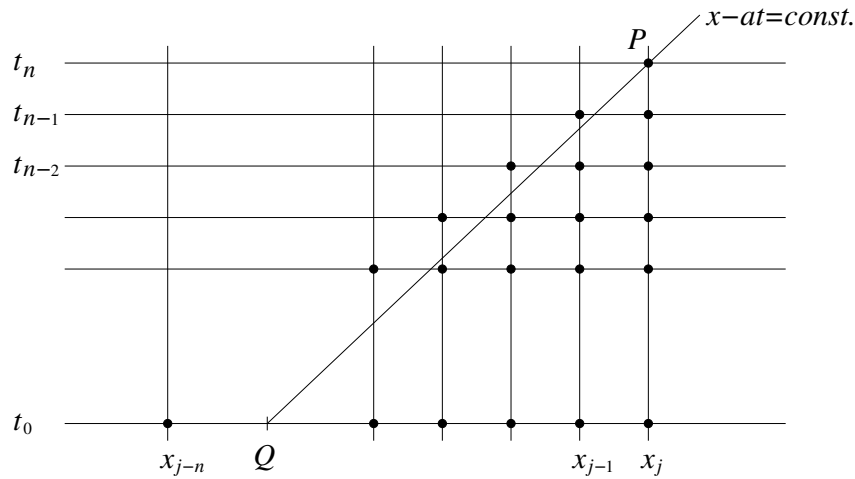
s použitím dopředné diference pro časovou derivaci a centrálních diferencí pro prostorové derivace.

**Cvičení 1** Uvažujme rovnici  $u_t + u_x = 0$  v oblasti  $(-2, 3) \times \mathbb{R}^+$  s počáteční podmínkou  $u^0$  znázorněnou v obr. 1. Definujme ekvidistanční prostorové uzly  $-2 = x_0 < x_1 < \dots < x_J = 3$  s prostorovým krokem  $h = 5/J$ . Dále uvažujme konstantní časový krok  $\tau > 0$  a časové hladiny  $t_n = n\tau$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . V čase  $t_0$  je přibližné řešení určeno počáteční podmínkou. Na následujících časových hladinách pak můžeme hodnoty přibližného řešení ve vnitřních uzlech určit pomocí libovolného z výše uvedených schémat, přičemž položíme  $U_0^n = 0$  a  $U_J^n = U_{J-1}^n$  pro  $n \in \mathbb{N}$  (pro  $n = 1$  však nelze použít schéma (32)). Naprogramujte výše uvedená schémata a proveďte výpočty pro  $J = 50$  a  $\tau = 0.08$ . U Laxova–Friedrichsova schématu otestujte, jaký vliv má zmenšení  $h$  na polovinu při nezměněném  $\tau$ , zmenšení  $\tau$  na polovinu při nezměněném  $h$  a současné zmenšení  $h$  i  $\tau$  na polovinu, popř. na čtvrtinu.



Obrázek 1: Počáteční podmínka  $u^0$  použitá ve cvičení 1.

Provedeme-li výpočty popsané ve cvičení 1, zjistíme, že v přibližných řešeních schémat (29) a (31) se již po několika málo časových krocích objeví velké oscilace a dostaneme zcela nepoužitelné výsledky. Na druhou stranu zbývající tři schémata vedou při  $J = 50$  a  $\tau = 0.08$  k přijatelným aproximacím řešení uvažované úlohy. Změníme-li však  $J$  či  $\tau$ , objeví se v některých případech nestabilní chování i u těchto schémat. Naším cílem nyní bude vysvětlit, proč k uvedeným jevům dochází.



Obrázek 2: Oblast závislosti PDR a schématu (30).

Zvolme bod  $P \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  a uvažujme schéma (30) a takovou síť, že bod  $P$  je její uzel. Nechť např.  $P = (x_j, t_n)$ . Pak hodnota  $U_j^n$  je určena hodnotami  $U_{j-1}^{n-1}$  a  $U_j^{n-1}$ . Podobně tyto dvě hodnoty jsou určeny hodnotami  $U_{j-2}^{n-2}$ ,  $U_{j-1}^{n-2}$  a  $U_j^{n-2}$ , viz obr. 2. Z toho plyne, že hodnota  $U_j^n$  závisí pouze na hodnotách počáteční podmínky  $u^0$  v bodech  $x_{j-n}, x_{j-n+1}, \dots, x_{j-1}, x_j$ . Pokud bychom uvažovali v rovnici (26) nenulovou pravou stranu  $f$ , závisela by hodnota  $U_j^n$  též na hodnotách  $f$  v uzlech sítě ležících v trojúhelníku s vrcholy  $(x_j, t_n)$ ,  $(x_{j-n}, 0)$  a  $(x_j, 0)$ . Tento trojúhelník se nazývá *oblast závislosti* schématu v uzlu  $(x_j, t_n)$ .

Pro řešení  $u$  úlohy (26), (27) plyne ze vztahu (28), že  $u(P) = u^0(Q)$ , kde  $Q$  je průsečík přímky  $t = 0$  a charakteristiky  $x - at = \text{const.}$  procházející bodem  $P$ , viz obr. 2. V případě rovnice (26) s nenulovou pravou stranou  $f$  závisí hodnota  $u(P)$  též na hodnotách funkce  $f$  v bodech úsečky  $PQ$ . Úsečka  $PQ$  je *oblastí závislosti* uvažované parciální diferenciální rovnice v bodě  $P$ . Nyní můžeme zformulovat následující podmínku.

**Věta 2** (CFL podmínka; Courant, Friedrichs, Lewy (1928)) *Nutná podmínka konvergence diferenčního schématu je, aby oblast závislosti parciální diferenciální rovnice ležela uvnitř oblasti závislosti diferenčního schématu.*

Pro schéma (30) je CFL podmínka splněna, leží-li bod  $Q$  na přímce  $t = 0$  mezi body  $x_{j-n}$  a  $x_j$ . To je právě tehdy, když  $a \geq 0$  a  $a\tau \leq h$ . Uvažujme posloupnost sítí s  $\tau/h = \text{const.}$  a  $h \rightarrow 0$  a nechť  $P$  je uzlem všech těchto sítí. Pak oblast závislosti schématu (30) v uzlu  $P$  je pro všechny tyto sítě stejná. Pokud  $a < 0$  nebo  $a\tau > h$ , pak pro všechny tyto sítě hodnota přibližného řešení  $U$  v uzlu  $P$  nezávisí na hodnotách počáteční podmínky  $u^0$  v pevně daném okolí bodu  $Q$  (neměnném při  $h \rightarrow 0$ ). Přibližná řešení v uzlu  $P$  tudíž obecně nemohou konvergovat k hodnotě  $u(P)$ . Z uvedeného je zřejmé, že platí též následující věta.

**Věta 3** *Nutnou podmínkou konvergence explicitního schématu typu  $U_j^{n+1} = \alpha U_{j-1}^n + \beta U_j^n + \gamma U_{j+1}^n$  pro rovnici (26) při  $\tau/h = \text{const.}$  je, aby platilo  $|a\tau/h| \leq 1$ .*

Nerovnost  $|a\tau/h| \leq 1$  z věty 3 se také často nazývá CFL podmínka.

Všimněme si, že pro schéma tvaru uvažovaného ve větě 3 se informace během jednoho časové kroku rozšíří o prostorový krok  $h$ . Numerická rychlost šíření informace je tudíž  $h/\tau$ . Uvedená nerovnost tedy říká, že numerická rychlost šíření musí být větší nebo rovna rychlosti šíření odpovídající uvažované parciální diferenciální rovnici. Pokud diferenční schéma nemůže šířit řešení alespoň tak rychle, jako se šíří řešení parciální diferenciální rovnice, nemůže řešení schématu konvergovat k řešení parciální diferenciální rovnice.

Na CFL podmínku se lze dívat též jako na nutnou podmínku stability diferenčního schématu. Obecně není pro stabilitu postačující, ale její velkou předností je její jednoduchost. Umožňuje tak vyřadit řadu diferenčních schémat s nepatrnou námahou věnovanou jejich vyšetřování. Teprve schémata, která splňují CFL podmínku je vhodné vyšetřovat podrobněji použitím kritérií, která jsou pro jejich stabilitu postačující.

Vrátíme-li se ke schématům (29)–(33), pak vidíme, že ve všech případech je nutno splnit podmínku  $|a\tau/h| \leq 1$ . To vysvětluje, proč schéma (33) vede pro úlohu ze cvičení 1 při  $h = 0.05$  a  $\tau = 0.08$  k oscilacím. Je též zřejmé, že schéma (29) nelze pro úlohu ze cvičení 1 použít, neboť oblast závislosti parciální diferenciální rovnice neleží v oblasti závislosti schématu. Oscilace lze pozorovat též v případě schématu (31) při splnění CFL podmínky. Vyšetřeme proto stabilitu tohoto schématu pomocí Fourierovy metody (tj. provedme von Neumannovu analýzu stability).

Rigorózní postup určení amplifikačního faktoru schématu (31) spočívá ve vyjádření přibližného řešení pomocí jeho Fourierovy transformace a využití ortonormality funkcí  $\{e^{i\xi j h}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Viděli jsme však, že formálně lze amplifikační faktor jednokrokového schématu získat nahrazením přibližného řešení síťovou funkcí  $\lambda(\xi)^n e^{i\xi j h}$ . Dosazením této funkce za  $U_j^n$  ve schématu (31) získáme

$$\lambda(\xi) = 1 + \frac{\nu}{2} (e^{-i\xi h} - e^{i\xi h}) = 1 - i\nu \sin(\xi h).$$

Pro libovolnou síť  $h$  a každé  $\xi$ , pro které  $\sin(\xi h) \neq 0$ , je tedy  $|\lambda(\xi)| > 1$ . Pro každý proces zjemňování, při němž je  $\nu$  pevné, je proto schéma nestabilní. Vidíme tedy, že CFL podmínka skutečně není pro stabilitu postačující.