

Jak jsme viděli, při  $a > 0$  lze k řešení rovnice (26) použít schéma (30). Bude-li  $a < 0$ , nelze toto schéma použít, neboť není splněna CFL podmínka, avšak můžeme použít schéma (29). To nás vede ke schématu

$$(34) \quad U_j^{n+1} = \begin{cases} (1 + \nu) U_j^n - \nu U_{j+1}^n, & \text{je-li } a < 0, \\ \nu U_{j-1}^n + (1 - \nu) U_j^n, & \text{je-li } a > 0. \end{cases}$$

Je-li  $a$  nekonstantní, pak  $a$  v (34) značí hodnotu  $a(x_j, t_n)$ . Všimněme si, že při  $a > 0$  se informace šíří ve směru kladné poloosy  $x$  (tj. zleva doprava) a k diskretizaci v prostorovém bodě  $x_j$  je využita informace v bodě  $x_j$  a vlevo od něj. Na druhou stranu při  $a < 0$  se informace šíří ve směru záporné poloosy  $x$  (tj. zprava doleva) a k diskretizaci v bodě  $x_j$  je použita informace v bodě  $x_j$  a vpravo od něj. Jedná se o tzv. *diskretizaci typu upwind*, kdy k diskretizaci v daném bodě využíváme informaci, která leží proti směru šíření (tj. která do daného bodu přichází).

Je-li  $|a \tau / h| \leq 1$ , splňuje schéma (34) CFL podmínku. Provedme též von Neumannovu analýzu stability (při konstantním  $a$ ). Dosazením  $U_j^n := \lambda(\xi)^n e^{i \xi j h}$  do schématu (34) dostaneme při  $a < 0$

$$\lambda(\xi) = (1 + \nu) - \nu e^{i \xi h} = 1 + \nu - \nu \cos(\xi h) - i \nu \sin(\xi h)$$

a při  $a > 0$

$$\lambda(\xi) = \nu e^{-i \xi h} + (1 - \nu) = 1 - \nu + \nu \cos(\xi h) - i \nu \sin(\xi h).$$

Tyto dva vztahy lze pro obě znaménka koeficientu  $a$  psát ve tvaru

$$(35) \quad \lambda(\xi) = 1 - |\nu| + |\nu| \cos(\xi h) - i \nu \sin(\xi h),$$

z čehož plyne, že

$$(36) \quad |\lambda(\xi)|^2 = 1 - 4 |\nu| (1 - |\nu|) \sin^2 \frac{\xi h}{2}.$$

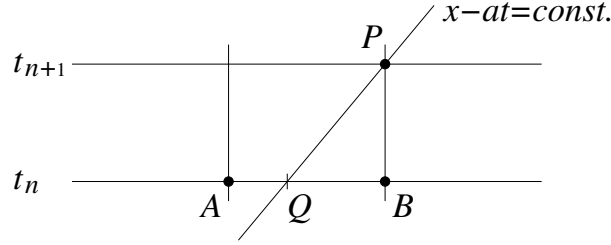
Zjišťujeme tedy, že  $|\lambda(\xi)| \leq 1$  pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}$  právě tehdy, když  $|\nu| \leq 1$ . V tomto případě tedy dává CFL podmínka správné meze stability.

Všimněme si, že schéma (34) lze přepsat do tvaru

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} - \frac{|a| h}{2} \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

Podobně jako Laxovo–Friedrichsovo schéma můžeme tedy i schéma (34) interpretovat jako přidání umělé difúze ke schématu (31). V tomto případě má umělá difúze velikost  $|a|h/2$ . Jelikož  $|a|h/2 = |\nu| h^2 / (2\tau)$ , je při  $|\nu| < 1$  umělá difúze přidávaná schématem (34) vždy menší než umělá difúze odpovídající Laxovu–Friedrichsovu schématu. Při  $|\nu| = 1$  jsou obě schémata stejná a dávají přesné řešení, neboť uzly sítě leží na charakteristikách.

Ukažme si ještě jiný způsob odvození schématu (34). Pro jednoduchost uvažujme případ  $a > 0$  a nechť  $a \tau \leq h$ . Předpokládejme, že známe hodnoty  $U_A, U_B$  přibližného



Obrázek 3: Odvození schématu (34) pomocí charakteristik.

řešení v uzlech  $A$ ,  $B$  a chceme určit hodnotu  $U_P$  přibližného řešení v uzlu  $P$ , viz obr. 3. Charakteristika procházející uzlem  $P$  protíná sítovou přímkou  $t = t_n$  v bodě  $Q$  ležícím mezi body  $A$  a  $B$ . Řešení  $u$  rovnice (26) splňuje  $u(P) = u(Q)$  a je tedy přirozené definovat hodnotu  $U_P$  jako aproximaci  $u$  v bodě  $Q$  získanou pomocí hodnot  $U_A$  a  $U_B$ . Použijeme-li lineární interpolaci, dostaneme vztah

$$U_P = \frac{|BQ|}{|AB|} U_A + \frac{|AQ|}{|AB|} U_B.$$

To je přesně schéma (30), tj. schéma (34) pro  $a > 0$ , neboť  $|AB| = h$ ,  $|BQ| = a\tau = \nu h$  a  $|AQ| = |AB| - |BQ| = (1 - \nu)h$ .

### 3.2 Fázová rychlost a disperze

Uvažujme úlohu (26), (27) s  $a = const$ . Definujme Fourierovu transformaci řešení  $u$  vztahem

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$\hat{u}_t + i\xi a \hat{u} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}^0(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

kde

$$\hat{u}^0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^0(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Je tedy

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}^0(\xi) e^{-i\xi a t}$$

a platí

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}^0(\xi) e^{i\xi(x-at)} d\xi = u^0(x - at).$$

Z uvedeného plyne, že

$$(37) \quad \hat{u}(\xi, t + \tau) = \hat{u}(\xi, t) e^{-i\xi a \tau}.$$

Během jednoho časového kroku se tedy fáze Fourierovy transformace řešení úlohy (26), (27) změní o  $-i\xi a \tau$ . Všimněme si též, že pro libovolné  $\xi \in \mathbb{R}$  je  $|\hat{u}(\xi, t)| = |\hat{u}^0(\xi)|$ , tj. amplituda libovolného Fourierova členu je v čase konstatní.