podmínky i stabilitu ve smyslu von Neumannovy analýzy a její platnost budeme nadále předpokládat. Uvažujme rovnici (26) pouze na časovém intervalu $(0,T]$, kde $T>0$ je daný pevně zvolený čas, tj. uvažujme úlohu

$$u_t + a\,u_x = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}\times(0,T]\,, \qquad u(x,0)=u^0(x) \quad \text{pro } x\in\mathbb{R}\,.$$

Schéma (29) tedy uvažujeme pro $n=0,\dots,N_T-1$, kde N_T je dolní celá část čísla T/τ. Pro $n=0$ splňuje přibližné řešení vztah (39). Chyba aproximace pak splňuje rovnici (47) a $e_j^0=0$ pro $j\in\mathbb{Z}$. Předpokládejme, že druhé derivace u_{xx} a u_{tt} jsou v množině $\mathbb{R}\times[0,T]$ omezeny v absolutní hodnotě konstantou K a položme $D=K\,(\tau+a\,h)/2$. Pak podle (46) je $|\varepsilon_j^n|\le D$ pro $j\in\mathbb{Z}$ a $n=0,\dots,N_T-1$. Z (47) tudíž dostáváme

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}|e_j^{n+1}| \le |1+\nu|\sup_{j\in\mathbb{Z}}|e_j^n| + |\nu|\sup_{j\in\mathbb{Z}}|e_j^n| + \tau\,D \qquad \forall\; n=0,\dots,N_T-1.$$

Poněvadž $|1+\nu|=1+\nu$ a $|\nu|=-\nu$, plyne odtud nerovnost

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}|e_j^{n+1}| \le \tau\,D + \sup_{j\in\mathbb{Z}}|e_j^n| \qquad \forall\; n=0,\dots,N_T-1\,. \tag{48}$$

Jelikož $e_j^0=0$ pro $j\in\mathbb{Z}$, dostáváme $\sup_{j\in\mathbb{Z}}|e_j^n|\le n\,\tau\,D$ pro $n=0,\dots,N_T$, a tudíž

$$|U_j^n-u_j^n| \le \frac{1}{2}\,K\,T\,(\tau+a\,h) \qquad \forall\; j\in\mathbb{Z}\,,\quad n=0,\dots,N_T\,.$$

To je požadovaný odhad chyby aproximace, který ukazuje, že chyba přibližného řešení konverguje stejnoměrně (dokonce lineárně v h a τ) do nuly pro $h,\tau\to 0$.

Z uvedeného odvození není zřejmé, jak odhad chyby aproximace souvisí s diskrétním principem maxima. Ukažme si proto nyní formální odvození vztahu (48), které platnost diskrétního principu maxima explicitně využívá. Nejprve definujme tzv. *srovnávací funkci* $\Phi_j^n=t_n\,D$ pro $j\in\mathbb{Z}$ a $n=0,\dots,N_T$. Pak

$$\Phi_j^{n+1}=(1+\nu)\,\Phi_j^n-\nu\,\Phi_{j+1}^n+\tau\,D \qquad \forall\; j\in\mathbb{Z}\,,\quad n=0,\dots,N_T-1\,.$$

S přihlédnutím k (47) zjišťujeme, že síťová funkce $V_j^n=e_j^n-\Phi_j^n$ splňuje

$$V_j^{n+1}\le(1+\nu)\,V_j^n-\nu\,V_{j+1}^n \qquad \forall\; j\in\mathbb{Z}\,,\quad n=0,\dots,N_T-1\,.$$

Podobně síťová funkce $W_j^n=-e_j^n-\Phi_j^n$ splňuje

$$W_j^{n+1}\le(1+\nu)\,W_j^n-\nu\,W_{j+1}^n \qquad \forall\; j\in\mathbb{Z}\,,\quad n=0,\dots,N_T-1\,.$$

Jelikož jsou pro $\nu\in[-1,0]$ splněny předpoklady pro platnost diskrétního principu maxima formulované v části 3.3 a předchozí dvě nerovnosti odpovídají nerovnosti (42), platí podle věty 4 nerovnost (43), tj.

$$V_j^{n+1}\le V_{\max}^n\,,\quad W_j^{n+1}\le W_{\max}^n \qquad \forall\; j\in\mathbb{Z}\,,\quad n=0,\dots,N_T-1\,.$$

První z těchto nerovností implikuje, že pro libovolné $j \in \mathbb{Z}$ a $n = 0, \ldots, N_T - 1$

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &\le t_{n+1}\, D + V_{\max}^n = t_{n+1}\, D + \sup_{j\in\mathbb{Z}} (e_j^n - t_n\, D) = \tau\, D + \sup_{j\in\mathbb{Z}} e_j^n \\ &\le \tau\, D + \sup_{j\in\mathbb{Z}} |e_j^n|\,. \end{aligned}$$

Podobně druhá nerovnost implikuje, že

$$\begin{aligned} -e_j^{n+1} &\le t_{n+1}\, D + W_{\max}^n = t_{n+1}\, D + \sup_{j\in\mathbb{Z}} (-e_j^n - t_n\, D) = \tau\, D + \sup_{j\in\mathbb{Z}} (-e_j^n) \\ &\le \tau\, D + \sup_{j\in\mathbb{Z}} |e_j^n|\,. \end{aligned}$$

Poslední dvě nerovnosti implikují, že

$$|e_j^{n+1}| \le \tau\, D + \sup_{j\in\mathbb{Z}} |e_j^n| \qquad \forall\ j \in \mathbb{Z}\,, \quad n = 0, \ldots, N_T - 1\,,$$

z čehož plyne nerovnost (48).

Poznamenejme nakonec, že analýza založená na chybě diskretizace a diskrétním principu maxima má u úloh pro parciální diferenciální rovnice prvního řádu jen omezenou použitelnost, neboť příslušné derivace obvykle neexistují v celé výpočetní oblasti. Uvedený postup je tak užitečný pouze pro lokální analýzu.

3.4 Numerické okrajové podmínky

Dosud se naše teoretické úvahy týkaly pouze numerického řešení Cauchyových úloh. V praxi ovšem obvykle řešíme parciální diferenciální rovnice na omezených prostorových oblastech. Na jejich hranicích (či jejich částech) pak obvykle předepisujeme okrajové podmínky. Může se však stát, že použité numerické schéma vyžaduje okrajovou podmínku na části hranice, kde parciální diferenciální rovnice žádnou okrajovou podmínku nevyžaduje. V takovém případě je nutno předepsat tzv. *numerickou okrajovou podmínku*.

Uvažujme rovnici (26) na omezeném prostorovém intervalu (A, B). Je-li $a > 0$ konstatní, pak charakteristiky vycházející z bodů ležících na úsečce $(A, B) \times \{0\}$ protínají polopřímku $\{B\} \times \mathbb{R}^+$, avšak nikoliv polopřímku $\{A\} \times \mathbb{R}^+$. Na polopřímce $\{A\} \times \mathbb{R}^+$ je proto nutno předepsat okrajovou podmínku, zatímco na polopřímce $\{B\} \times \mathbb{R}^+$ je řešení u určeno počáteční podmínkou a okrajovou podmínkou na $\{A\} \times \mathbb{R}^+$. Je-li $a < 0$ konstatní, pak je situace opačná: okrajovou podmínku je třeba předepsat na polopřímce $\{B\} \times \mathbb{R}^+$, zatímco na polopřímce $\{A\} \times \mathbb{R}^+$ je řešení u určeno počáteční podmínkou a okrajovou podmínkou na $\{B\} \times \mathbb{R}^+$. Pokud a není konstantní, může např. každý bod polopřímek $\{A\} \times \mathbb{R}^+$ a $\{B\} \times \mathbb{R}^+$ ležet na nějaké charakteristice vycházející z bodu na $(A, B) \times \{0\}$, a tudíž žádnou okrajovou podmínku nelze předepsat. Nebo naopak žádná charakteristika zmíněné polopřímky neprotíná a pak na obou polopřímkách je potřeba předepsat okrajové podmínky.

Výpočetní oblast $[A, B] \times \mathbb{R}_0^+$ pokryjme rovnoměrnou sítí s prostorovým krokem h a časovým krokem τ. Předpokládáme, že $h = |B - A|/J$, kde $J \in \mathbb{N}$. Pak síť obsahuje uzly

(x_j, t_n), kde $x_j = A+j\,h$, $t_n = n\,\tau$, $j = 0, \dots, J$, $n \in \mathbb{N}_0$. V uzlech (x_j, t_n) s $j = 1, \dots, J-1$ a $n \in \mathbb{N}_0$ uvažujme Laxovo–Friedrichsovo schéma (33). Toto schéma vyžaduje hodnoty U_0^n a U_J^n, bez ohledu na to, zda rovnice (26) umožňuje tyto hodnoty předepsat. Je-li např. $a > 0$ konstatní, pak, jak jsme již uvedli, rovnice (26) neumožňuje předepsat okrajovou podmínku podél polopřímky $\{B\}\times\mathbb{R}^+$, a je tedy nutno předepsat numerickou okrajovou podmínku v uzlech (x_J, t_n). Příklady numerických okrajových podmínek v uzlech (x_J, t_n) jsou následující vztahy:

$$U_J^n = U_{J-1}^n\,, \tag{49}$$

$$U_J^n = 2\,U_{J-1}^n - U_{J-2}^n\,, \tag{50}$$

$$U_J^n = U_{J-1}^{n-1}\,, \tag{51}$$

$$U_J^n = 2\,U_{J-1}^{n-1} - U_{J-2}^{n-2}\,. \tag{52}$$

Vztahy (49) a (50) jsou jednoduché extrapolace přibližného řešení z vnitřních uzlů na hranici. Vztahy (51) a (52) se někdy nazývají kvazicharakteristické extrapolace, neboť využívají hodnot přibližného řešení v uzlech ležících na přímkách procházejících uzly (x_{J-1}, t_{n-1}) a (x_J, t_n), jejichž směr přibližně odpovídá směru charakteristik.

Alternativou k výše uvedenému postupu je zavést fiktivní uzly (x_{-1}, t_n) a (x_{J+1}, t_n), do nichž extrapolujeme přibližné řešení z původních uzlů sítě, a ve všech původních uzlech sítě (tj. i hraničních) použít schéma (33). Použijeme-li k extrapolaci vztah (50), pak získáme

$$\frac{U_J^{n+1} - \frac{1}{2}\,(U_{J+1}^n + U_{J-1}^n)}{\tau} + a\,\frac{U_{J+1}^n - U_{J-1}^n}{2\,h} = 0\,, \qquad U_{J+1}^n = 2\,U_J^n - U_{J-1}^n\,,$$

z čehož plyne

$$\frac{U_J^{n+1} - U_J^n}{\tau} + a\,\frac{U_J^n - U_{J-1}^n}{h} = 0\,.$$

Vidíme tedy, že extrapolace do fiktivních uzlů je v tomto případě ekvivalentní aproximaci diferenciální rovnice v hraničních uzlech pomocí jednostranných diferencí, což je další typ numerické okrajové podmínky. Často je však jednodušší použít některý z extrapolačních vztahů (49)–(52) než zavádět fiktivní uzly nebo jednostranné diference.

Je důležité zdůraznit, že některé numerické okrajové podmínky mohou pro dané schéma způsobit nestabilní chování, které se projeví narůstajícími oscilacemi v přibližném řešení. Přitom numerická okrajová podmínka, kterou lze použít s daným numerickým schématem, může být s jiným schématem nestabilní a naopak. Pro každou zvolenou kombinaci schématu a numerické okrajové podmínky je proto potřeba stabilitu vyšetřovat zvlášť.

3.5 Laxovo–Wendroffovo schéma

Z jednokrokových schémat, která jsme dosud analyzovali, jsou pro řešení rovnice (26) použitelná (při libovolném znaménku a) pouze schémata (33) a (34). Obě tato schémata jsou pouze prvního řádu přesnosti (v případě schématu (33) za podmínky $h = O(\tau)$). Naším cílem je nyní odvodit schéma druhého řádu přesnosti v prostoru i v čase. Pro jednoduchost budeme opět uvažovat konstantní rychlost a. Bude však poučné schéma odvodit pro nenulovou pravou stranu $f = f(x,t)$. Řešíme tedy rovnici

$$u_t + a\,u_x = f \qquad \text{v } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \tag{53}$$

s počáteční podmínkou (27).

Předpokládejme, že $u \in C^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+)$. Pak pro $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$ je

$$u(x,t+\tau) = u(x,t) + u_t(x,t)\,\tau + \frac{1}{2}\,u_{tt}(x,t)\,\tau^2 + O(\tau^3)\,. \tag{54}$$

Derivace u_t a u_{tt} získáme z rovnice (53). V případě u_t je to triviální. Abychom získali u_{tt}, zderivujeme rovnici (53) podle t. Tím vznikne člen u_{xt}, který získáme z rovnice (53) zderivováním podle x. Máme tedy

$$u_{tt} = f_t - a\,u_{xt} = f_t - a\,(f_x - a\,u_{xx}) = a^2\,u_{xx} - a\,f_x + f_t\,.$$

Dosazením do (54) obdržíme

$$u(x,t+\tau) = u - a\,\tau\,u_x + \tau\,f + \frac{a^2\,\tau^2}{2}\,u_{xx} - \frac{a\,\tau^2}{2}\,f_x + \frac{\tau^2}{2}\,f_t + O(\tau^3)\,,$$

kde členy na pravé straně jsou uvažovány v bodě (x,t). Jelikož

$$u_x = \frac{\Delta_{0x}\,u}{h} + O(h^2)\,, \qquad u_{xx} = \frac{\delta_x^2\,u}{h^2} + O(h^2)\,,$$

dostáváme

$$\Delta_{+t}\,u = -\nu\,\Delta_{0x}\,u + O(\tau\,h^2) + \frac{\nu^2}{2}\,\delta_x^2\,u + \frac{\tau}{2}\,[f + f(x,t+\tau)] - \frac{a\,\tau^2}{2\,h}\,\Delta_{0x}\,f + O(\tau^3)\,.$$

To nás vede ke schématu

$$\begin{aligned}\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\,h} - \frac{a^2\,\tau}{2}\,\frac{U_{j+1}^n - 2\,U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}& \\ = \frac{1}{2}\left(f_j^{n+1} + f_j^n\right) - \frac{a\,\tau}{4\,h}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right)&,\end{aligned} \tag{55}$$

které můžeme též zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\nu}{2}\,(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}\,(U_{j+1}^n - 2\,U_j^n + U_{j-1}^n)& \\ + \frac{\tau}{2}\left(f_j^{n+1} + f_j^n\right) - \frac{\nu\,\tau}{4}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right)&.\end{aligned}$$

Z odvození je zřejmé, že chyba diskretizace splňuje $\varepsilon_{h,\tau} = O(h^2 + \tau^2)$, tj. skutečně jsme získali schéma druhého řádu přesnosti v prostoru i v čase. Pro $f \equiv 0$ je Laxovo–Wendroffovo schéma ekvivalentní přidání umělé difúze o velikosti $\frac{1}{2}\,a^2\,\tau$ k nestabilnímu