

schématu (31). V tomto případě můžeme Laxovo–Wendroffovo schéma odvodit též pomocí charakteristik, podobně jako schéma (34), viz obr. 3. Přidáme-li v obr. 3 na přímce  $t = t_n$  uzel  $C$  tak, že  $B$  je střed úsečky  $AC$ , a definujeme-li v bodě  $Q$  aproximaci  $u$  pomocí kvadratické interpolace hodnot přibližného řešení v uzlech  $A$ ,  $B$  a  $C$ , získáme Laxovo–Wendroffovo schéma.

Von Neumannovu analýzu provádíme pro  $f \equiv 0$ . Získáme

$$\lambda(\xi) = 1 - 2\nu^2 \sin^2 \frac{\xi h}{2} - i\nu \sin(\xi h), \quad |\lambda(\xi)|^2 = 1 - 4\nu^2 (1 - \nu^2) \sin^4 \frac{\xi h}{2},$$

a schéma je tedy stabilní pro  $|\nu| \leq 1$ , přičemž celý tento interval je povolen CFL podmínkou. Fázová rychlost splňuje

$$\alpha(\xi) = a \left[ 1 - \frac{1}{6} (1 - \nu^2) (\xi h)^2 + O((\xi h)^4) \right]$$

a při  $|\nu| < 1$  tedy dochází vždy ke zpoždování fáze (pro malé  $|\xi h|$ ). Pro  $|\nu| = 1$  je  $\lambda(\xi) = e^{-i\xi a\tau}$ , a schéma tudíž dává přesné řešení. Fázová chyba je stejného řádu jako u schémat (33) a (34), avšak tlumení je podstatně menší (v jednom časovém kroku je chyba v amplitudě řádu  $(\xi h)^4$  místo  $(\xi h)^2$ ). Pro nejvyšší frekvenci na síti ( $\xi = \pi/h$ ) je  $\lambda(\pi/h) = 1 - 2\nu^2$ , a tedy  $\alpha(\pi/h) = 0$ , což znamená, že tato rychle oscilující složka řešení se nepohybuje pryč. Při  $|\nu| < 1$  je však tato složka řešení tlumena: např. počáteční podmínce  $U_j^0 = (-1)^j$  odpovídá řešení  $U_j^n = (1 - 2\nu^2)^n (-1)^j$ . Nedostatkem Laxova–Wendroffova schématu je, že na rozdíl od schémat (33) a (34) nesplňuje diskrétní princip maxima.

**Cvičení 2** *Proveďte výpočet ze cvičení 1 pro Laxovo–Wendroffovo schéma a srovnajte výsledek s přibližným řešením získaným pomocí Laxova–Friedrichsova schématu (33).*

**Cvičení 3** *Uvažujme rovnici  $u_t + u_x = 0$  v oblasti  $(-1, 1) \times \mathbb{R}^+$  s počáteční podmínkou  $u^0(x) = \sin(2\pi x)$ . Definujme ekvidistantní prostorové uzly  $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_J = 1$  s prostorovým krokem  $h = 2/J$ . Dále definujme uzel  $x_{J+1} = 1 + h$  ležící mimo interval  $[-1, 1]$ . Zvolme  $J = 20$  a uvažujme konstantní časový krok  $\tau = 0.09$ . V čase  $t = 0$  je přibližné řešení určeno počáteční podmínkou. Na následujících časových hladinách  $t_n = n\tau$ ,  $n \in \mathbb{N}$  počítejte v uzlech  $x_1, \dots, x_J$  přibližná řešení pomocí schémat (33), (34) a (55). Pak položte  $U_0^n = U_J^n$  a  $U_{J+1}^n = U_1^n$ . Uvažujme tedy periodické okrajové podmínky. U zmíněných schémat porovnejte fázovou chybu a tlumení a srovnajte výsledky provedených numerických experimentů s teoretickými výsledky uvedenými výše.*

### 3.6 Schéma Crankovo–Nicolsonové

Schéma Crankovo–Nicolsonové jsme v úvodní části o metodě konečných diferencí definovali jako aritmetický průměr explicitního a implicitního schématu. Nyní si ukážeme jiný způsob, jak toto schéma odvodit. Naše motivace bude opět získat jednokrokové schéma pro rovnici (53), které je druhého řádu v prostoru i v čase.

Odvození bude založeno na tom, že na diferenci  $u(x, t + \tau) - u(x, t)$  můžeme pohlížet jako na centrální diferenci vzhledem k času  $t + \frac{\tau}{2}$ . Je tedy

$$\frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\delta_t u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\tau} = u_t(x, t + \frac{\tau}{2}) + O(\tau^2).$$

Dále platí

$$\frac{u(x, t + \tau) + u(x, t)}{2} = u(x, t + \frac{\tau}{2}) + \frac{u(x, t + \tau) - 2u(x, t + \frac{\tau}{2}) + u(x, t)}{2}.$$

Čítenel zlomku na pravé straně představuje centrální diferenci druhého řádu vzhledem k  $t$  v bodě  $(x, t + \frac{\tau}{2})$  s krokem  $\frac{\tau}{2}$ . Jelikož  $\delta_t^2 u = O(\tau^2)$ , dostáváme

$$\frac{u(x, t + \tau) + u(x, t)}{2} = u(x, t + \frac{\tau}{2}) + O(\tau^2).$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} u_x(x, t + \frac{\tau}{2}) &= \frac{1}{2} [u_x(x, t + \tau) + u_x(x, t)] + O(\tau^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{u(x + h, t + \tau) - u(x - h, t + \tau)}{2h} + \frac{u(x + h, t) - u(x - h, t)}{2h} \right] + O(h^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

To ukazuje, že v bodě  $(x, t + \frac{\tau}{2})$  může být vhodné rovnici (53) aproximovat schématem

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{4h} = \frac{f_j^{n+1} + f_j^n}{2},$$

což lze psát též ve tvaru

$$-\frac{\nu}{4} U_{j-1}^{n+1} + U_j^{n+1} + \frac{\nu}{4} U_{j+1}^{n+1} = \frac{\nu}{4} U_{j-1}^n + U_j^n - \frac{\nu}{4} U_{j+1}^n + \frac{\tau}{2} (f_j^{n+1} + f_j^n).$$

Nyní již není možné hodnotu přibližného řešení v daném uzlu na nové časové vrstvě jednoduchým způsobem vyjádřit pomocí hodnot přibližného řešení na předcházející časové vrstvě a jedná se tedy o implicitní schéma. Hodnoty přibližného řešení na nové časové vrstvě jsou navzájem svázány a získají se vyřešením soustavy lineárních rovnic. Jelikož hodnota přibližného řešení v daném uzlu na nové časové vrstvě závisí na všech hodnotách přibližného řešení z předcházející časové vrstvy, nevede CFL podmínka k žádné podmínce na parametr  $\nu$ .

Von Neumannova analýza (pro  $f \equiv 0$ ) dává amplifikační faktor

$$\lambda(\xi) = \frac{1 - i \frac{\nu}{2} \sin(\xi h)}{1 + i \frac{\nu}{2} \sin(\xi h)}.$$

Je tedy  $|\lambda(\xi)| = 1$  pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}$ , a tudíž schéma je nepodmíněně stabilní. Nedochozí však k žádnému tlumení, takže drobné poruchy v řešení zůstávají trvale přítomny. Speciálně pro vlnu s nejvyšší frekvencí  $\pi/h$  opět platí, že fázová rychlost je nulová, avšak na rozdíl od Laxova–Wendroffova schématu se její amplituda v čase nemění: počáteční podmínce  $U_j^0 = (-1)^j$  odpovídá řešení  $U_j^n = (-1)^j$ . Stejně jako u Laxova–Wendroffova schématu neplatí ani pro schéma Crankovo–Nicolsonové diskretní princip maxima.

### 3.7 Analýza leapfrog scheme

Názvem *leapfrog scheme* je označováno dvoukrokové schéma (32). Je zřejmé, že se jedná o schéma druhého řádu přesnosti v prostoru i v čase, které nesplňuje diskrétní princip maxima. CFL podmínka je splněna, jestliže  $|\nu| \leq 1$ , což budeme nadále předpokládat.

Zabývejme se nyní stabilitou leapfrog scheme. Stejně jako v případě jednokrokových schémat vyjádříme přibližné řešení  $U_j^n$  v integrálním tvaru pomocí jeho Fourierovy transformace  $\widehat{U}^n(\xi)$  a dosadíme do schématu. Tím získáme vztah

$$\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i\xi j h} \left( \widehat{U}^{n+1}(\xi) + i 2\nu \sin(\xi h) \widehat{U}^n(\xi) - \widehat{U}^{n-1}(\xi) \right) d\xi = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

z něhož díky ortogonalitě funkcí  $\{e^{i\xi j h}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  plyne

$$(56) \quad \widehat{U}^{n+1}(\xi) + i 2\nu \sin(\xi h) \widehat{U}^n(\xi) - \widehat{U}^{n-1}(\xi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \xi \in [-\pi/h, \pi/h].$$

Pro každé  $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$  tedy máme soustavu lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice této soustavy diferenčních rovnic je

$$\lambda^2 + i 2\nu \sin(\xi h) \lambda - 1 = 0.$$

Její kořeny jsou

$$\lambda_{\pm}(\xi) = -i\nu \sin(\xi h) \pm \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2(\xi h)}$$

a platí  $|\lambda_{\pm}(\xi)| = 1$ . Pokud  $\lambda_+(\xi) = \lambda_-(\xi) =: \lambda(\xi)$ , pak obecné řešení soustavy diferenčních rovnic (56) má tvar

$$\widehat{U}^n(\xi) = \alpha(\xi) \lambda(\xi)^n + \beta(\xi) n \lambda(\xi)^{n-1},$$

kde  $\alpha(\xi)$  a  $\beta(\xi)$  jsou konstanty určené hodnotami  $\widehat{U}^0(\xi)$  a  $\widehat{U}^1(\xi)$ . Je-li  $\beta(\xi) \neq 0$ , bude  $\widehat{U}^n(\xi)$  růst lineárně s  $n$ . Toto nestabilní chování je třeba vyloučit. Jelikož  $\lambda_+(\xi) = \lambda_-(\xi)$  může nastat pouze při  $|\nu| = 1$ , budeme požadovat, aby  $|\nu| < 1$ . Pak  $\lambda_+(\xi) \neq \lambda_-(\xi)$  a obecné řešení soustavy diferenčních rovnic (56) je

$$(57) \quad \widehat{U}^n(\xi) = \alpha_+(\xi) \lambda_+(\xi)^n + \alpha_-(\xi) \lambda_-(\xi)^n.$$

Snadno zjistíme, že schéma je v tomto případě stabilní. Nutná a postačující podmínka pro stabilitu leapfrog scheme tedy je  $|\nu| < 1$ .

Leapfrog scheme (32) nelze použít k určení přibližného řešení na časové vrstvě  $t_1$  a schéma je tedy potřeba inicializovat pomocí vhodného jednokrokového schématu. Lze ukázat, že k inicializaci vícekrokových schémat lze použít libovolné jednokrokové schéma, které je konzistentní s řešenou parciální diferenciální rovnicí. Toto schéma může být i nestabilní, neboť aplikací schématu pouze v několika prvních krocích dojde jen k malému růstu řešení (malému díky konzistenci) a tento růst nebude při použití stabilního vícekrokového schématu dále zesilován. Jeli  $\tau/h = \text{const.}$ , pak inicializační schéma může mít o 1 nižší řád přesnosti než vícekrokové schéma, přičemž celková přesnost bude odpovídat vícekrokovému schématu.

Ze vztahu (57) plyne

$$\widehat{U}^n(\xi) = \widehat{U}^0(\xi) \lambda_+(\xi)^n + \gamma(\xi) \frac{\lambda_+(\xi)^n - \lambda_-(\xi)^n}{\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi)},$$

kde  $\gamma(\xi) = \widehat{U}^1(\xi) - \widehat{U}^0(\xi) \lambda_+(\xi)$ . Použijeme-li k inicializaci schéma (31), je  $\widehat{U}^1(\xi) = (1 - i\nu \sin(\xi h)) \widehat{U}^0(\xi)$ . Použitím vztahu  $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$  získáme

$$\lambda_{\pm}(\xi) = -i\nu \sin(\xi h) \pm 1 \mp \frac{1}{2}\nu^2 \sin^2(\xi h) + O((\xi h)^4),$$

a tudíž

$$\gamma(\xi) = (1 - i\nu \sin(\xi h) - \lambda_+(\xi)) \widehat{U}^0(\xi) = \left( \frac{\nu^2}{2} \sin^2(\xi h) + O((\xi h)^4) \right) \widehat{U}^0(\xi).$$

Vidíme, že pro malé hodnoty  $|\xi h|$  je  $\gamma(\xi)$  malé, a schéma se tudíž chová jako jednokrokové schéma s amplifikačním faktorem  $\lambda_+$ . Pro větší hodnoty  $|\xi h|$  velikost  $\gamma(\xi)$  být malá nemusí. Část řešení příslušná  $\lambda_-$  se nazývá parazitická složka řešení. Jelikož  $\lambda_-(0) = -1$ , tato složka řešení v průběhu času rychle osciluje. Později ukážeme, že se parazitická složka řešení pohybuje špatným směrem (pro  $a > 0$  se pohybuje zprava doleva).

**Cvičení 4** *Uvažujte ve cvičení 1 okrajovou podmínku  $U_j^n = 0$ , která není konzistentní s řešenou rovnicí, a proveďte výpočet pro leapfrog scheme. Měli byste pozorovat, že v důsledku zmíněné okrajové podmínky vznikne v bodě  $x = 3$  parazitická složka řešení, která je silně oscilující a pohybuje se zprava doleva. Okrajová podmínka v bodě  $x = -2$  přemění parazitickou složku na neparazitickou.*

Parazitická složka řešení se objeví při každém výpočtu s vícečlennými schémata. Obvykle nezpůsobuje podstatné potíže, avšak v některých případech je ji potřeba redukovat nebo odstranit. Vliv parazitických složek lze redukovat pomocí disipace.

**Definice 3** *Schéma je disipativní řádu  $2r$ , jestliže amplifikační faktory splňují podmínku*

$$|\lambda_j(\xi)| \leq 1 - C \left( \sin \frac{\xi h}{2} \right)^{2r} \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

kde  $C$  je kladná konstanta nezávislá na  $h$  a  $\tau$ .

Pro leapfrog scheme a schéma Crankovo–Nicolsonové je velikost amplifikačních faktorů rovna 1 pro všechny frekvence. Říkáme, že tato schémata jsou *ostře nedisipativní*. Pro Laxovo–Friedrichsovo schéma je  $|\lambda(\pi/h)| = 1$ , avšak  $|\lambda(\xi)| < 1$  pro  $0 < |\xi| < \pi/h$  a  $|\nu| < 1$ . Toto schéma je proto nedisipativní, ale ne ostře. Redukuje amplitudu u většiny frekvencí, nikoli však u nejvyšší frekvence na síti.

Všimněme si, že síťová funkce  $U_j^n = (-1)^{n+j} \eta$  je pro libovolné  $\eta \in \mathbb{R}$  řešením leapfrog scheme. Vidíme tedy, že počáteční poruchy se šíří, aniž by byly tlumeny. O přítomnosti této šachovnicové složky řešení rozhodují pouze počáteční a okrajové podmínky.