Vlastnosti nedisipativního schématu lze zlepšit přidáním disipace. Je však třeba dát pozor, abychom tím nezhoršili řád přesnosti schématu. Např. leapfrog scheme lze modifikovat takto:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\,\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\,h} + \frac{\varepsilon}{2\,\tau}\left(\frac{1}{2}\,\delta_x\right)^4 U_j^{n-1} = 0\,,$$

kde ε je vhodná kladná konstanta. Jelikož $\delta_x^4\,u = O(h^4)$, schéma je nadále druhého řádu přesnosti, pokud $\tau \geq C\,h^2$. Tato podmínka nepředstavuje žádné podstatné omezení, neboť časový krok volíme obvykle srovnatelný s prostorovým krokem. Pro vyšetření stability přepíšeme schéma do tvaru

$$U_j^{n+1} - U_j^{n-1} + \nu\,U_{j+1}^n - \nu\,U_{j-1}^n + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\,\delta_x\right)^4 U_j^{n-1} = 0$$

a přibližné řešení vyjádříme v integrálním tvaru pomocí jeho Fourierovy transformace $\widehat{U}^n(\xi)$. Oproti případu bez disipace se navíc objeví člen $\varepsilon\,(\frac{1}{2}\,\delta_x)^4\,\widehat{U}^{n-1}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\,j\,h}$. Jak víme, $\delta_x^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\,j\,h} = -4\,\sin^2\frac{\xi\,h}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\,j\,h}$, a tudíž $(\frac{1}{2}\,\delta_x)^4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\,j\,h} = \sin^4\frac{\xi\,h}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\,j\,h}$. Místo soustavy diferenčních rovnic (56), proto nyní získáme

$$\widehat{U}^{n+1}(\xi) + \mathrm{i}\,2\,\nu\,\sin(\xi\,h)\,\widehat{U}^n(\xi) - \left(1 - \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2}\right)\widehat{U}^{n-1}(\xi) = 0\,.$$

Kořeny odpovídající charakteristické rovnice jsou

$$\lambda_\pm(\xi) = -\mathrm{i}\,\nu\,\sin(\xi\,h) \pm \sqrt{1 - \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2} - \nu^2\,\sin^2(\xi\,h)}\,.$$

Je-li

(58) $$\nu^2\,\sin^2(\xi\,h) + \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2} \leq 1\,,$$

je

$$|\lambda_\pm(\xi)| = \sqrt{1 - \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2}} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2}\,,$$

a schéma je tedy stabilní a disipativní řádu 4 (k tomu je opět nutné, aby $|\nu| < 1$). Podmínku (58) můžeme přepsat do tvaru

$$4\,\nu^2\,\sin^2\frac{\xi\,h}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\xi\,h}{2}\right) + \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2} \leq 1\,.$$

Stačí tedy nalézt takové hodnoty ε, že

$$4\,\nu^2\,s\,(1-s) + \varepsilon\,s^2 \leq 1 \qquad \forall\ s \in [0,1]\,.$$

Je-li $\nu^2 \in (0,\frac{1}{2}]$, můžeme volit $\varepsilon \in (0,1]$, neboť pak $4\,\nu^2\,s\,(1-s) + \varepsilon\,s^2 \leq 2\,s\,(1-s) + s^2 = s\,(2-s) \leq 1$. Je-li $\nu^2 \in [\frac{1}{2},1)$, volíme $\varepsilon \in (0, 4\,\nu^2\,(1-\nu^2)]$. Pak $4\,\nu^2\,s\,(1-s) + \varepsilon\,s^2 = 4\,\nu^2\,s + (\varepsilon - 4\,\nu^2)\,s^2 \leq 4\,\nu^2\,s\,(1-\nu^2\,s) \leq 1$.

Podobně jako výše můžeme modifikovat i metodu Crankovu–Nicolsonové pro řešení rovnice (53). Obdržíme schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{4\,h} + \frac{\varepsilon}{\tau}\left(\frac{1}{2}\,\delta_x\right)^4 U_j^n = \frac{f_j^{n+1} + f_j^n}{2}\,,$$

které je druhého řádu přesnosti (pokud $\tau \geq C\,h^2$) a disipativní řádu 4 pro malé hodnoty ε.

Cvičení 5 *Zopakujte výpočet ze cvičení 4 pro leapfrog scheme s disipací (v prostorových uzlech x_1 a x_{J-1} uvažujte leapfrog scheme bez disipace).*

Pro vícekroková schémata vždy existuje právě jeden amplifikační faktor $\lambda_0(\xi)$ takový, že $\lambda_0(0) = 1$. Tento amplifikační faktor použijeme k definici fázové rychlosti. Pro leapfrog scheme je to amplifikační faktor λ_+. Platí

$$\sin(\xi\,\alpha(\xi)\,\tau) = \nu\,\sin(\xi\,h) = \nu\,\xi\,h\left(1 - \frac{(\xi\,h)^2}{6} + O((\xi\,h)^4)\right)\,,$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= a\left(1 - \frac{(\xi\,h)^2}{6} + O((\xi\,h)^4)\right)\left(1 + \frac{(\nu\,\xi\,h)^2}{6} + O((\xi\,h)^4)\right)\\ &= a\left(1 - \frac{1}{6}\,(1-\nu^2)\,(\xi\,h)^2 + O((\xi\,h)^4)\right).\end{aligned}$$

Získali jsme tedy totéž jako pro Laxovo-Wendroffovo schéma a rovněž platí $\alpha(\pi/h) = 0$.

Pro parazitickou složku řešení leapfrog scheme odpovídající λ_- zavedeme fázovou rychlost vztahem $\lambda_-(\xi) = -|\lambda_-(\xi)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\xi\,\alpha_-(\xi)\,\tau}$, neboť $\lambda_-(0) = -1$. Pak $\sin(\xi\,\alpha_-(\xi)\,\tau) = -\nu\,\sin(\xi\,h)$, a tudíž $\alpha_-(\xi) = -\alpha(\xi)$. Parazitická složka řešení se tedy pohybuje opačným směrem než je správný směr řešení. Navíc platí $\alpha_-(\pi/h) = 0$, a tudíž nejvyšší frekvence, které neobsahují přesnou informaci, se nešíří pryč.

3.8 Volba parametru ν

Vlastnosti schémat vyšetřovaných v předchozích odstavcích závisí na volbě parametru ν, tj. na poměru prostorového a časového kroku. V řadě případů jsme viděli, že pro $|\nu| = 1$ schémata dávají přesné řešení, což je ovšem dáno jednoduchostí uvažované modelové úlohy. Pro úlohy s nekonstantními koeficienty nebo komplikovanější problémy k tomu již nedochází. Nicméně naše teoretické úvahy ukazují, že je obecně vhodné volit $|\nu|$ blízko hranice stability, neboť tím dosáhneme malé disipace i disperze. Zajímá-li nás pouze určitá frekvence ξ_0, měli bychom volit h tak, aby $|\xi_0\,h| \ll \pi$ a vlna o frekvenci ξ_0 mohla být tudíž na použité síti dobře aproximována.