4.10 Princip maxima a konvergence

Věta 8 *θ–schéma* (90) *s* $\theta \in [0,1]$ *a* $\mu\,(1-\theta) \le \frac{1}{2}$ *dává přibližné řešení* $\{U_j^n\}$ *splňující*

$$U_{\min}^n \le U_j^n \le U_{\max}^n \,,$$

kde

$$\begin{aligned} U_{\min}^n &= \min\{U_0^m,\ 0\le m\le n\,;\ U_j^0,\ 0\le j\le J\,;\ U_J^m,\ 0\le m\le n\}\,,\\ U_{\max}^n &= \max\{U_0^m,\ 0\le m\le n\,;\ U_j^0,\ 0\le j\le J\,;\ U_J^m,\ 0\le m\le n\}\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Schéma (90) zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} (92)\qquad & (1+2\,\theta\,\mu)\,U_j^{n+1}\\ & = \theta\,\mu\,(U_{j-1}^{n+1}+U_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)\,\mu\,(U_{j-1}^n+U_{j+1}^n) + [1-2\,(1-\theta)\,\mu]\,U_j^n\,. \end{aligned}$$

Koeficienty na pravé straně jsou nezáporné a jejich součet je $(1+2\,\theta\,\mu)$ (koeficienty před dvojčleny počítáme dvakrát). Předpokládejme, že U nabývá svého maxima ve vnitřním bodě a nechť toto maximum je U_j^{n+1}. Pak hodnoty U na pravé straně vztahu (92) jsou menší nebo rovny U_j^{n+1}, a jelikož součet koeficientů je $(1+2\,\theta\,\mu)$, musí být $U = U_j^{n+1}$ v každém z pěti sousedních uzlů v (92), pokud příslušný koeficient je nenulový. Je-li tedy $\theta \ne 0$, dostáváme $U_j^{n+1} = U_0^{n+1} = U_J^{n+1}$. Je-li $\theta = 0$, můžeme zkonstruovat posloupnost bodů, až dosáhneme hranice. Tedy $U_j^{n+1} = U_{\max}^n$. Stejným způsobem lze postupovat pro minimum. □

Věta 9 *Uvažujme posloupnost* $(h_i,\tau_i)\to(0,0)$ *pro* $i\to\infty$ *a nechť* $\mu_i\,(1-\theta)\le\frac{1}{2}$. *Nechť chyba diskretizace odpovídající schématu* (90) *konverguje k nule stejnoměrně v množině* $[0,1]\times[0,T]$. *Nechť chyby v okrajových a počátečních podmínkách rovněž konvergují stejnoměrně k nule pro* $i\to\infty$. *Pak aproximace dané schématem* (90) *konvergují stejnoměrně v* $[0,1]\times[0,T]$ *k řešení rovnice* (59) *s konzistentními okrajovými a počátečními podmínkami.*

Důkaz. Dle definice chyby diskretizace je pro $e_j^n = U_j^n - u(x_j,t_n)$

$$\begin{aligned} (93)\qquad (1+2\,\theta\,\mu)\,e_j^{n+1} &= \theta\,\mu\,(e_{j-1}^{n+1}+e_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)\,\mu\,(e_{j-1}^n+e_{j+1}^n)\\ &\quad + [1-2\,(1-\theta)\,\mu]\,e_j^n - \tau\,\varepsilon_j^{n+1/2}\,,\qquad j=1,2,\dots,J-1,\ \ n=0,1,2,\dots\,. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $e_j^0=0$, $j=0,\dots,J$, $e_0^n=e_J^n=0$, $n=0,1,2,\dots$ a označme

$$\|e^n\|_\infty = \max_{j=0,\dots,J}|e_j^n|\,,\qquad \|\varepsilon^{n+1/2}\|_\infty = \max_{j=1,\dots,J-1}|\varepsilon_j^{n+1/2}|\,.$$

Pak

$$(1+2\,\theta\,\mu)\,\|e^{n+1}\|_\infty \le 2\,\theta\,\mu\,\|e^{n+1}\|_\infty + \|e^n\|_\infty + \tau\,\|\varepsilon^{n+1/2}\|_\infty\,,$$

a tudíž $\|e^{n+1}\|_\infty \le \|e^n\|_\infty + \tau\,\|\varepsilon^{n+1/2}\|_\infty$, z čehož plyne

$$\|e^n\|_\infty \le \tau \sum_{m=0}^{n-1} \|\varepsilon^{m+1/2}\|_\infty \le n\,\tau \max_{m=0,\dots,n-1} \|\varepsilon^{m+1/2}\|_\infty \to 0 \quad \text{pro} \quad i \to \infty\,.$$

Předpokládejme nyní, že chyby v okrajových a počátečních podmínkách jsou nenulové, tj.

$$e_j^0 = \eta_j^0\,, \quad j = 0,\dots,J\,, \qquad e_0^n = \eta_0^n\,,\ e_J^n = \eta_J^n\,, \quad n = 0,1,2,\dots\,. \tag{94}$$

Pak $e_j^n = \bar{e}_j^n + \tilde{e}_j^n$, kde $\bar{e}_j^n$ splňuje (93) s homogenními počátečními a okrajovými podmínkami a $\tilde{e}_j^n$ splňuje (92) a (94). Pak $\|\bar{e}^n\|_\infty$ splňuje předchozí odhad a $\|\tilde{e}^n\|_\infty \le \max\{|\eta_0^m|,\ 0 \le m \le n\,;\ |\eta_j^0|,\ 0 \le j \le J\,;\ |\eta_J^m|,\ 0 \le m \le n\}$ dle předchozí věty. □

Podmínka pro platnost principu maxima je mnohem více omezující než podmínka stability plynoucí z Fourierovy analýzy. Například pro $\theta = \frac{1}{2}$ dostáváme $\mu \le 1$.

Princip maxima představuje alternativní prostředek pro získání podmínek stability. Oproti Fourierově analýze má tu výhodu, že ho lze snadno aplikovat i na úlohy s nekonstantními koeficienty. Avšak snadné je odvodit pouze postačující podmínky stability.

4.11 Obecnější okrajové podmínky[1]

Nahraďme Dirichletovu okrajovou podmínku v bodě $x = 0$ okrajovou podmínkou

$$u_x(0,t) = \alpha(t)\,u(0,t) + g(t) \qquad \forall\ t > 0\,, \tag{95}$$

kde $\alpha(t) \ge 0$.

Nejjednodušší aproximace okrajové podmínky (95) v čase $t = t_n$ je

$$\frac{U_1^n - U_0^n}{h} = \alpha^n\,U_0^n + g^n\,, \qquad \alpha^n \equiv \alpha(t_n), \quad g^n \equiv g(t_n)\,,$$

z čehož plyne

$$U_0^n = \beta^n\,U_1^n - \beta^n\,g^n\,h\,, \qquad \text{kde} \qquad \beta^n = \frac{1}{1+\alpha^n\,h}\,. \tag{96}$$

Nyní můžeme definovat θ–schéma stejným způsobem jako výše. Soustava je opět tridiagonální a má nyní J rovnic. Rovnice (96) je první rovnicí této soustavy.

Z (96) plyne, že v prvním vnitřním bodě je

$$\delta_x^2\,U_1^n = U_2^n - 2\,U_1^n + U_0^n = U_2^n - (2-\beta^n)\,U_1^n - \beta^n\,g^n\,h\,.$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} U_1^{n+1} - U_1^n = \mu\,\theta\,&\{U_2^{n+1} - (2-\beta^{n+1})\,U_1^{n+1} - \beta^{n+1}\,g^{n+1}\,h\} \\ &+ \mu\,(1-\theta)\,\{U_2^n - (2-\beta^n)\,U_1^n - \beta^n\,g^n\,h\}\,, \end{aligned}$$

[1] Tato část nebyla odpřednášena a nebude zkoušena

z čehož plyne

$$[1+\theta\,\mu\,(2-\beta^{n+1})]\,U_1^{n+1} = [1-(1-\theta)\,\mu\,(2-\beta^n)]\,U_1^n + \theta\,\mu\,U_2^{n+1} + (1-\theta)\,\mu\,U_2^n \\ - \mu\,h\,[\theta\,\beta^{n+1}\,g^{n+1} + (1-\theta)\,\beta^n\,g^n]\,.$$

Definujeme-li obvyklým způsobem chybu diskretizace $\varepsilon_1^{n+1/2}$, platí pro chybu aproximace $e_1^n = U_1^n - u(x_1,t_n)$

$$[1+\theta\,\mu\,(2-\beta^{n+1})]\,e_1^{n+1} = [1-(1-\theta)\,\mu\,(2-\beta^n)]\,e_1^n + \theta\,\mu\,e_2^{n+1} + (1-\theta)\,\mu\,e_2^n - \tau\,\varepsilon_1^{n+1/2}\,.$$

Jelikož se tato rovnice liší od rovnic v ostatních uzlech sítě, nemůžeme použít Fourierovu analýzu chyby. Lze však využít princip maxima, neboť pro $\mu\,(1-\theta) \le \frac{1}{2}$ jsou všechny koeficienty nezáporné a součet koeficientů napravo není větší než koeficient nalevo. Můžeme proto odhadnout chybu aproximace pomocí chyby diskretizace stejně jako výše.

Zbývá odhadnout $\varepsilon_1^{n+1/2}$. Uvažujme případ $\theta = 0$ (explicitní metoda). Pak

$$\begin{aligned} \frac{U_1^{n+1}-U_1^n}{\tau} &= \frac{\delta_x^2\,U_1^n}{h^2} + \frac{1}{h^2}\,[-U_0^n + \beta^n\,U_1^n - \beta^n\,g^n\,h] \\ &= \frac{\delta_x^2\,U_1^n}{h^2} + \frac{\beta^n}{h}\left[\frac{U_1^n-U_0^n}{h} - \alpha^n\,U_0^n - g^n\right]. \end{aligned}$$

Tedy (při označení $u_j^n = u(x_j,t_n)$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{n+1/2} &= \frac{u_1^{n+1}-u_1^n}{\tau} - \frac{\delta_x^2\,u_1^n}{h^2} - \frac{\beta^n}{h}\left[\frac{\Delta_{-x}\,u_1^n}{h} - \alpha^n\,u_0^n - g^n\right] \\ &= [u_t + \tfrac{1}{2}\,u_{tt}\,\tau + \ldots](x_1,t_n) - [u_{xx} + \tfrac{1}{12}\,u_{xxxx}\,h^2 + \ldots](x_1,t_n) \\ &\quad - \frac{\beta^n}{h}\,[u_x + \tfrac{1}{2}\,u_{xx}\,h + \ldots - \alpha\,u - g](x_0,t_n) \\ &\approx -\tfrac{1}{2}\,\beta^n\,u_{xx}(x_0,t_n)\,. \end{aligned}$$

Chyba diskretizace tudíž nekonverguje k nule. Důkaz konvergence chyby aproximace lze sice zachránit, avšak diskrétní řešení je zatíženo poměrně velkou chybou.

Zkusme jiný postup. Zavedeme fiktivní hodnotu U_{-1}^n vně $[0,1]$, takže okrajovou podmínku (95) můžeme aproximovat vztahem

$$\frac{U_1^n - U_{-1}^n}{2\,h} = \alpha^n\,U_0^n + g^n\,. \tag{97}$$

V bodě $x=0$ aproximujeme rovnici jako ve vnitřních bodech a za U_{-1}^n dosadíme z (97). Pak

$$U_0^{n+1} - U_0^n = \mu\,\theta\,[U_1^{n+1} - 2\,U_0^{n+1} + (U_1^{n+1} - 2\,h\,\alpha^{n+1}\,U_0^{n+1} - 2\,h\,g^{n+1})] \\ + \mu\,(1-\theta)\,[U_1^n - 2\,U_0^n + (U_1^n - 2\,h\,\alpha^n\,U_0^n - 2\,h\,g^n)]\,,$$

z čehož plyne

$$[1+2\,\theta\,\mu\,(1+\alpha^{n+1}\,h)]\,U_0^{n+1} = [1-2\,(1-\theta)\,\mu\,(1+\alpha^n\,h)]\,U_0^n \\ + 2\,\theta\,\mu\,U_1^{n+1} + 2\,(1-\theta)\,\mu\,U_1^n - 2\,\mu\,h\,[\theta\,g^{n+1} + (1-\theta)\,g^n]\,.$$

Pokud $\mu\,(1-\theta)\,(1+\alpha^n\,h) \le \frac{1}{2}$, je možno chybu aproximace opět odhadnout pomocí chyby diskretizace postupem založeným na principu maxima. Chyba diskretizace je v tomto případě $\varepsilon_0^{n+1/2} = O(\tau + h)$.

4.12 Obecnější lineární rovnice[2]

Uvažujme nejdříve rovnici

$$u_t = b\, u_{xx} \qquad \forall\ t > 0, \quad x \in (0,1)\,,$$

kde $b = b(x,t) > 0$. Explicitnímu schématu (64) pak odpovídá diskretizace

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\tau}{h^2}\, b_j^n\, (U_{j+1}^n - 2\, U_j^n + U_{j-1}^n)\,,$$

kde $b_j^n = b(x_j, t_n)$. Stejně jako dříve získáme

$$\varepsilon_{h,\tau}(x,t) = \tfrac{1}{2}\, u_{tt}\, \tau - \tfrac{1}{12}\, b(x,t)\, u_{xxxx}\, h^2 + \ldots\,.$$

Konvergenci lze dokázat stejným způsobem jako pro $b = 1$, ale podmínku stability je třeba nahradit podmínkou

$$\frac{\tau}{h^2}\, b(x,t) \le \frac{1}{2}\,.$$

Odhad chyby pak je

$$|U_j^n - u(x_j, t_n)| \le T\, (\tfrac{1}{2}\, M_1\, \tau + \tfrac{1}{12}\, B\, M_2\, h^2)\,,$$

kde $B \ge b(x,t)\ \forall\ (x,t) \in [0,1] \times [0,T]$.

θ–schéma lze definovat různými způsoby. Jednou možností je uvažovat

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \frac{\tau}{h^2}\, b^*\, [\theta\, \delta_x^2\, U_j^{n+1} + (1-\theta)\, \delta_x^2\, U_j^n]\,,$$

kde b^* je nějaká vhodná hodnota. Nabízí se položit $b^* = b_j^{n+1/2}$. Rozvoj chyby diskretizace je pak stejný jako dříve až na přenásobení faktorem b. Rovněž konvergenci lze dokázat jako dříve pomocí principu maxima, avšak potřebujeme, aby

$$\frac{\tau}{h^2}\, (1-\theta)\, b(x,t) \le \frac{1}{2}\,.$$

Je též možné položit $b^* = \frac{1}{2}(b_j^{n+1} + b_j^n)$, což nezhorší odhad chyby diskretizace, neboť $b^* = [b + \frac{1}{4}\, b_{tt}\, \tau^2 + \ldots](x_j, t_{n+1/2})$.

Nejobecnější tvar lineární parabolické rovnice druhého řádu je

$$u_t = b\, u_{xx} - a\, u_x + c\, u + d \qquad \forall\ t > 0, \quad x \in (0,1)\,, \tag{98}$$

kde $a = a(x,t)$, $b = b(x,t)$, $c = c(x,t)$, $d = d(x,t)$ jsou dané funkce, přičemž $b > 0$. Explicitní schéma je přirozené uvažovat ve tvaru

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = b_j^n\, \frac{U_{j+1}^n - 2\, U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} - a_j^n\, \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\, h} + c_j^n\, U_j^n + d_j^n\,. \tag{99}$$

[2] Tato část nebyla odpřednášena a nebude zkoušena

Označíme-li
$$\mu_j^n = \frac{\tau}{h^2}\, b_j^n\,, \qquad \nu_j^n = \frac{\tau}{h}\, a_j^n\,,$$
zjistíme, že chyba aproximace splňuje
$$e_j^{n+1} = (1 - 2\,\mu_j^n + \tau\, c_j^n)\, e_j^n + (\mu_j^n - \tfrac{1}{2}\,\nu_j^n)\, e_{j+1}^n + (\mu_j^n + \tfrac{1}{2}\,\nu_j^n)\, e_{j-1}^n - \tau\, \varepsilon_j^n\,.$$
Abychom při odhadu chyby mohli postupovat jako dříve, musíme zajistit, že koeficienty jsou nezáporné a jejich součet není větší než 1. To vyžaduje

$$\tfrac{1}{2}\,|\nu_j^n| \le \mu_j^n\,, \qquad 2\,\mu_j^n - \tau\, c_j^n \le 1\,, \qquad c_j^n \le 0\,. \tag{100}$$

Speciálně (dle první podmínky) musí být
$$h\,\frac{|a_j^n|}{2\, b_j^n} \le 1$$
a toto omezení implikuje omezení τ prostřednictvím druhé podmínky:
$$\tau \le \frac{h^2}{2\, b_j^n - h^2\, c_j^n}\,.$$
V mnoha úlohách z praxe je $|a_j^n| \gg b_j^n$, což vyžaduje velmi malé prostorové a časové kroky.

Jednoduchý způsob, jak tento problém napravit, je použít aproximace
$$u_x(x_j, t_n) \approx \begin{cases} \dfrac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} & \text{je-li } a(x_j, t_n) \ge 0, \\[2ex] \dfrac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} & \text{je-li } a(x_j, t_n) < 0. \end{cases}$$
Funkci a můžeme interpretovat jako rychlost látky, v níž sledujeme rozložení veličiny u, ve směru kladné x–ové poloosy. K diskretizaci $u_x(x_j, t_n)$ tedy využíváme hodnoty u z té strany, odkud se do bodu x_j v čase t_n látka pohybujeme. Hovoříme proto o diskretizaci typu *upwind*.

Předpokládejme pro jednoduchost, že $a(x,t) \ge 0$ a $c(x,t) = 0$. Explicitní schéma má pak tvar
$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = b_j^n\, \frac{U_{j+1}^n - 2\, U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} - a_j^n\, \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{2\, h} + d_j^n\,,$$
což dává
$$e_j^{n+1} = (1 - 2\,\mu_j^n - \nu_j^n)\, e_j^n + \mu_j^n\, e_{j+1}^n + (\mu_j^n + \nu_j^n)\, e_{j-1}^n - \tau\, \varepsilon_j^n\,.$$
Aby všechny koeficienty na pravé straně byly nezáporné, potřebujeme nyní pouze podmínku $2\,\mu_j^n + \nu_j^n \le 1$. Stabilita tedy nevyžaduje žádné omezení prostorového kroku h. Cenou za to je, že nyní máme pouze $\varepsilon_j^n = O(h + \tau)$.

Někdy se můžeme setkat s parabolickou rovnicí v samoadjungovaném tvaru
$$u_t = (p(x,t)\, u_x)_x \qquad \forall\ t > 0, \quad x \in (0,1)\,,$$

kde $p > 0$. Rozderivováním můžeme tuto rovnici převést do tvaru (98), ale obvykle je výhodnější zkonstruovat diferenční aproximaci původního samoadjungovaného tvaru:

$$\begin{aligned}
[(p\,u_x)_x](x_j,t_n) &\approx \frac{1}{h}\,[(p\,u_x)(x_{j+1/2},t_n) - (p\,u_x)(x_{j-1/2},t_n)] \\
&\approx \frac{1}{h^2}\,[p^n_{j+1/2}\,(u^n_{j+1}-u^n_j) - p^n_{j-1/2}\,(u^n_j-u^n_{j-1})]\,.
\end{aligned}$$

Explicitní diferenční schéma má tedy tvar

$$\frac{U^{n+1}_j - U^n_j}{\tau} = \frac{p^n_{j+1/2}\,(U^n_{j+1}-U^n_j) - p^n_{j-1/2}\,(U^n_j-U^n_{j-1})}{h^2}\,,$$

a tudíž

$$U^{n+1}_j = [1-\mu\,(p^n_{j+1/2}+p^n_{j-1/2})]\,U^n_j + \mu\,p^n_{j+1/2}\,U^n_{j+1} + \mu\,p^n_{j-1/2}\,U^n_{j-1}\,, \qquad \mu = \frac{\tau}{h^2}\,.$$

Chybu aproximace můžeme tudíž vyšetřovat stejným způsobem jako dříve, budou-li všechny koeficienty nezáporné, což je splněno, pokud $\mu\,P \le \frac{1}{2}$, kde P splňuje $p(x,t) \le P$ v uvažované oblasti. Máme tedy omezení stejného typu jako dříve.

Zřejmým způsobem lze na výše uvažované obecnější rovnice zobecnit θ–schéma vedoucí k implicitnímu schématu.

5 Parabolické rovnice ve dvou prostorových dimenzích[3]

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast. Hledáme funkci $u = u(x,y,t)$ definovanou pro $(x,y) \in \overline{\Omega}$ a $t \ge 0$ takovou, že

(101) $$u_t = \Delta\,u \equiv u_{xx} + u_{yy} \qquad \forall\ t > 0, \quad (x,y) \in \Omega\,,$$

(102) $$u(x,y,t) = u^b(x,y,t) \qquad \forall\ t > 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega\,,$$

(103) $$u(x,y,0) = u^0(x,y) \qquad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}\,,$$

kde u^b a u^0 jsou zadané funkce.

Předpokládejme nejdříve, že $\Omega = (0,X) \times (0,Y)$, zvolme $J_x, J_y \in \mathbb{N}$ a položme $h_x = X/J_x$, $h_y = Y/J_y$. Oblast Ω pokryjeme rovnoměrnou pravoúhlou sítí s krokem dělení h_x v x–ovém směru a h_y v y–ovém směru. Uzly prostorové sítě jsou $(x_r,y_s) = (r\,h_x, s\,h_y)$, kde $r = 0,1,\ldots,J_x$ a $s = 0,1,\ldots,J_y$. Přibližné řešení značíme

$$U^n_{r,s} \approx u(x_r,y_s,t_n)\,, \qquad r = 0,1,\ldots,J_x, \quad s = 0,1,\ldots,J_y, \quad n = 0,1,2,\ldots\,.$$

Nejjednodušší explicitní diferenční schéma je

$$\frac{U^{n+1}_{r,s} - U^n_{r,s}}{\tau} = \frac{\delta^2_x\,U^n_{r,s}}{h_x^2} + \frac{\delta^2_y\,U^n_{r,s}}{h_y^2}\,, \qquad r = 1,\ldots,J_x-1, \quad s = 1,\ldots,J_y-1\,.$$

[3]Tato část nebyla odpřednášena a nebude zkoušena

Hodnota $U_{r,s}^{n+1}$ je určena hodnotami $U_{r,s}^n$, $U_{r+1,s}^n$, $U_{r-1,s}^n$, $U_{r,s+1}^n$, $U_{r,s-1}^n$; hovoříme o tzv. pětibodovém schématu.

Vlastnosti schématu lze analyzovat analogicky jako v jedné dimenzi. Chyba diskretizace je

$$\varepsilon(x,t) = \tfrac{1}{2}\, u_{tt}\, \tau - \tfrac{1}{12}\, [u_{xxxx}\, h_x^2 + u_{yyyy}\, h_y^2] + \dots .$$

Za předpokladu omezenosti uvedených derivací a při

$$\mu_x + \mu_y \le \tfrac{1}{2}\,, \qquad \text{kde} \quad \mu_x = \frac{\tau}{h_x^2},\ \ \mu_y = \frac{\tau}{h_y^2}\,,$$

dostaneme stejně jako v jedné dimenzi pro chybu aproximace

$$\|e^n\|_\infty \le T\, (\tfrac{1}{2}\, M_1\, \tau + \tfrac{1}{12}\, M_2^x\, h_x^2 + \tfrac{1}{12}\, M_2^y\, h_y^2)\,.$$

Lze rovněž aplikovat Fourierovu analýzu stability. Pro $U_{r,s}^n = \lambda^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_x\, r\, h_x + k_y\, s\, h_y]}$ dostaneme amplifikační faktor

$$\lambda = \lambda(\boldsymbol{k}) = 1 - 4\left[\mu_x\, \sin^2\frac{k_x\, h_x}{2} + \mu_y\, \sin^2\frac{k_y\, h_y}{2}\right],$$

kde $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$. Vidíme, že $|\lambda(\boldsymbol{k})| \le 1\ \forall\ \boldsymbol{k}$ právě tehdy, když $\mu_x + \mu_y \le \frac{1}{2}$.

Zřejmým způsobem můžeme též rozšířit do dvou dimenzí θ–metodu. Speciálně metoda Crankova–Nicolsonové bude

$$(1 - \tfrac{1}{2}\, \mu_x\, \delta_x^2 - \tfrac{1}{2}\, \mu_y\, \delta_y^2)\, U_{r,s}^{n+1} = (1 + \tfrac{1}{2}\, \mu_x\, \delta_x^2 + \tfrac{1}{2}\, \mu_y\, \delta_y^2)\, U_{r,s}^n\,.$$

Soustava rovnic již není tridiagonální a její vyřešení je podstatně dražší než výpočet hodnot $U_{r,s}^{n+1}$ u explicitní metody. Hledáme proto jiné možnosti, jak získat nepodmíněně stabilní metodu.

5.1 Metoda střídavých směrů

Uvažujme následující modifikaci schématu Crankova–Nicolsonové:

(104) $$(1 - \tfrac{1}{2}\, \mu_x\, \delta_x^2)(1 - \tfrac{1}{2}\, \mu_y\, \delta_y^2)\, U_{r,s}^{n+1} = (1 + \tfrac{1}{2}\, \mu_x\, \delta_x^2)(1 + \tfrac{1}{2}\, \mu_y\, \delta_y^2)\, U_{r,s}^n\,.$$

Dodatečné členy ve schématu nezhorší chybu diskretizace, neboť

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\, \mu_x\, \mu_y\, \delta_x^2\, \delta_y^2\, \frac{u(x,y,t+\frac{1}{2}\,\tau) - u(x,y,t-\frac{1}{2}\,\tau)}{\tau} &\approx \frac{\tau^2}{4\, h_x^2\, h_y^2}\, \delta_x^2\, \delta_y^2\, u_t(x,y,t) \\ &\approx \frac{1}{4}\, u_{xxyyt}(x,y,t)\, \tau^2\,,\end{aligned}$$

a tudíž $\varepsilon_{h_x,h_y,\tau} = O(h_x^2 + h_y^2 + \tau^2)$. Přednost schématu tkví v tom, že výpočet $U_{r,s}^{n+1}$ lze rozložit na řešení problémů s tridiagonálními maticemi. Zavedeme mezivýsledek $U_{r,s}^{n+1/2}$ a (104) zapíšeme v ekvivalentním tvaru

(105) $$(1 - \tfrac{1}{2}\, \mu_x\, \delta_x^2)\, U_{r,s}^{n+1/2} = (1 + \tfrac{1}{2}\, \mu_y\, \delta_y^2)\, U_{r,s}^n\,, \qquad r = 1,\dots,J_x - 1,\ \ s = 1,\dots,J_y - 1\,,$$

(106) $$(1 - \tfrac{1}{2}\, \mu_y\, \delta_y^2)\, U_{r,s}^{n+1} = (1 + \tfrac{1}{2}\, \mu_x\, \delta_x^2)\, U_{r,s}^{n+1/2}\,, \qquad r = 1,\dots,J_x - 1,\ \ s = 1,\dots,J_y - 1\,.$$

Výpočet $U_{r,s}^{n+1/2}$ z (105) představuje vyřešení $J_y - 1$ soustav lineárních rovnic řádu $J_x - 1$. Podobně (106) sestává z $J_x - 1$ soustav lineárních rovnic řádu $J_y - 1$. Každá ze soustav má tridiagonální matici a provedení jednoho časového kroku je tak mnohem rychlejší než řešení soustavy lineárních rovnic odpovídající Crankově–Nicolsonové metodě. Výpočetní náročnost je asi trojnásobná ve srovnání s jedním krokem explicitního schématu. Dosazením Fourierova členu $\lambda^n\, e^{i[k_x\, r\, h_x + k_y\, s\, h_y]}$ do (104) získáme

$$\lambda(\boldsymbol{k}) = \frac{\left(1 - 2\,\mu_x\,\sin^2\dfrac{k_x\,h_x}{2}\right)\left(1 - 2\,\mu_y\,\sin^2\dfrac{k_y\,h_y}{2}\right)}{\left(1 + 2\,\mu_x\,\sin^2\dfrac{k_x\,h_x}{2}\right)\left(1 + 2\,\mu_y\,\sin^2\dfrac{k_y\,h_y}{2}\right)}$$

z čehož plyne, že schéma (104) je nepodmíněně stabilní.

6 Numerické řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu

6.1 Diskretizace Poissonovy rovnice

Uvažujme modelovou úlohu

$$-\Delta\, u = f \quad \text{v } \Omega := (0,1)^2\,, \qquad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega\,. \tag{107}$$

Množinu $\overline{\Omega}$ pokryjeme rovnoměrnou čtvercovou sítí s J intervaly v každém směru, čímž vzniknou uzly $(x_r, y_s) := (r\,h, s\,h)$, $r, s = 0, \dots, J$, kde $h = 1/J$. Označíme

$$\begin{aligned} N_\Omega \;\; &= \{(x_r, y_s)\,;\; r, s \in \{1, \dots, J-1\}\}\,, \\ N_{\partial\Omega} &= \{(x_r, 0), (x_r, 1), (0, y_s), (1, y_s)\,;\; r, s \in \{0, \dots, J\}\}\,. \end{aligned}$$

Pak $N_\Omega \subset \Omega$ a $N_{\partial\Omega} \subset \partial\Omega$, tj. N_Ω je množina vnitřních uzlů a $N_{\partial\Omega}$ je množina hraničních uzlů. Řešení u úlohy (107) budeme v uzlech $(x_r, y_s) \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}$ aproximovat hodnotami $U_{r,s}$. Dále zavedeme označení $u_{r,s} := u(x_r, y_s)$ a $f_{r,s} := f(x_r, y_s)$.

K diskretizaci úlohy (107) použijeme v každém vnitřním uzlu $(x_r, y_s) \in N_\Omega$ aproximaci

$$\begin{aligned} (\Delta\, u)(x_r, y_s) = u_{xx}(x_r, y_s) + u_{yy}(x_r, y_s) &\approx \frac{\delta_x^2\, u_{r,s}}{h^2} + \frac{\delta_y^2\, u_{r,s}}{h^2} \\ &= \frac{u_{r+1,s} - 2\,u_{r,s} + u_{r-1,s}}{h^2} + \frac{u_{r,s+1} - 2\,u_{r,s} + u_{r,s-1}}{h^2}\,, \end{aligned}$$

což nás vede k následující definici přibližného řešení $\{U_{r,s}\}_{r,s=0}^{J}$:

$$\frac{4\,U_{r,s} - U_{r+1,s} - U_{r-1,s} - U_{r,s+1} - U_{r,s-1}}{h^2} = f_{r,s}\,, \qquad r, s = 1, \dots, J-1\,, \tag{108}$$

$$U_{r,0} = U_{r,J} = U_{0,s} = U_{J,s} = 0\,, \qquad r, s = 0, \dots, J\,. \tag{109}$$

K určení přibližného řešení je tedy třeba vyřešit soustavu $(J-1)^2$ lineárních algebraických rovnic.

6.2 Konvergence přibližných řešení

Nechť $U = \{U_{r,s}\}_{r,s=0}^{J}$ je libovolná síťová funkce a definujme operátor L_h vztahem

$$(L_h\,U)_{r,s} := \frac{4\,U_{r,s} - U_{r+1,s} - U_{r-1,s} - U_{r,s+1} - U_{r,s-1}}{h^2}\,, \qquad r,s = 1,\dots,J-1\,.$$

Místo $(L_h\,U)_{r,s}$ budeme užívat jednodušší značení $L_h\,U_{r,s}$. Pak úlohu (108)–(109) můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\text{(110)} \qquad L_h\,U_P = f_P \quad \forall\ P \in N_\Omega\,, \qquad U_P = 0 \quad \forall\ P \in N_{\partial\Omega}\,,$$

kde pro uzly sítě nyní používáme značení P místo (x_r, y_s). Později ukážeme (viz důsledek 1 na str. 61), že operátor L_h splňuje diskrétní princip maxima

$$\text{(111)} \qquad L_h\,U_P \le 0 \quad \forall\ P \in N_\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \max_{P\in N_\Omega} U_P \le \max_{Q\in N_{\partial\Omega}} U_Q\,.$$

Podobně jako u evolučních úloh můžeme princip maxima využít k odhadu chyby aproximace. Nejprve definujeme chybu diskretizace

$$\varepsilon_{r,s} := L_h\,u_{r,s} - f_{r,s}\,, \qquad r,s = 1,\dots,J-1\,,$$

což můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\text{(112)} \qquad \varepsilon_P := L_h\,u_P - f_P \qquad \forall\ P \in N_\Omega\,.$$

Použitím Taylorova rozvoje získáme pro libovolné $P \in N_\Omega$

$$\text{(113)} \qquad |\varepsilon_P| \le \frac{1}{12}\,(M_1 + M_2)\,h^2\,, \qquad \text{kde} \qquad M_1 = \max_{\overline{\Omega}} |u_{xxxx}|\,, \quad M_2 = \max_{\overline{\Omega}} |u_{yyyy}|\,.$$

Pomocí (112), (110) a (107) zjišťujeme, že chyba aproximace $e_P := U_P - u_P$ splňuje

$$\text{(114)} \qquad L_h\,e_P = -\varepsilon_P \qquad \forall\ P \in N_\Omega\,, \qquad e_P = 0 \qquad \forall\ P \in N_{\partial\Omega}\,.$$

Vztah (114) nám umožňuje pomocí diskrétního principu maxima (111) a odhadu chyby diskretizace (113) odvodit odhad chyby aproximace. Za tím účelem je potřeba definovat vhodnou funkci splňující levou stranu implikace (111), k čemuž podobně jako u odvození odhadu chyby aproximace pro přibližné řešení transportní rovnice využijeme tzv. *srovnávací funkci* Φ. V tomto případě ji můžeme definovat vztahem

$$\Phi(x,y) := (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2\,.$$

Funkci Φ přiřadíme síťovou funkci $\{\Phi_P\}_{P\in N_\Omega\cup N_{\partial\Omega}}$, kde $\Phi_P = \Phi(P)$. Jelikož funkce Φ má nulové čtvrté derivace, plyne ze (113), že

$$L_h\,\Phi_P = (-\Delta\Phi)(P) = -4 \qquad \forall\ P \in N_\Omega\,.$$

Označme

$$\Psi_P := e_P + \frac{1}{4}\,\frac{h^2}{12}\,(M_1 + M_2)\,\Phi_P\,.$$

Pak

$$L_h\,\Psi_P = L_h\,e_P - \frac{h^2}{12}\,(M_1 + M_2) = -\varepsilon_P - \frac{h^2}{12}\,(M_1 + M_2) \le 0 \qquad \forall\ P \in N_\Omega$$

a podle (111) je

$$\Psi_P \le \frac{1}{4}\,\frac{h^2}{12}\,(M_1 + M_2)\,\max_{Q\in N_{\partial\Omega}}\,\Phi_Q = \frac{1}{8}\,\frac{h^2}{12}\,(M_1 + M_2) \qquad \forall\ P \in N_\Omega\,.$$

Jelikož $e_P \le \Psi_P$, dostáváme

$$U_P - u_P \le \frac{1}{96}\,(M_1 + M_2)\,h^2\,.$$

Označíme-li $\Psi_P := -e_P + \frac{1}{4}\,\frac{h^2}{12}\,(M_1 + M_2)\,\Phi_P$, získáme stejný odhad pro $-(U_P - u_P)$. Je tedy

$$|U_{r,s} - u(x_r, y_s)| \le \frac{1}{96}\,(M_1 + M_2)\,h^2 \qquad \forall\ r, s \in \{0, \ldots, J\}\,.$$

6.3 Obecnější rovnice difúze

Uvažujme úlohu

$$(115) \qquad -\mathrm{div}(a\,\nabla u) = f \quad \text{v } \Omega\,, \qquad \alpha_0\,u + \alpha_1\,\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{na } \partial\Omega\,,$$

kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^2$, n je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$, a je hladká funkce splňující $a(x, y) \ge a_0 > 0$ a α_0, α_1 jsou konstanty splňující

$$\alpha_0 \ge 0\,, \qquad \alpha_1 \ge 0\,, \qquad \alpha_0 + \alpha_1 > 0\,.$$

Rovnice (115) popisuje difúzi veličiny u v nehomogenním izotropním prostředí. Pokud je $a(x, y) = \varepsilon$, jedná se o difúzi v homogenním izotropním prostředí a rovnice (115) se redukuje na rovnici (107).

Oblast Ω pokryjeme pravidelnou obdélníkovou sítí s krokem h_x ve směru osy x a s krokem h_y ve směru osy y. Uzly sítě, které leží vedle sebe na některé ze síťových přímek nazýváme sousední. Každý uzel má tedy čtyři sousední uzly. Uzly ležící v Ω, jejichž všichni čtyři sousedé leží v $\overline{\Omega}$ nazýváme *regulární uzly*. Uzly ležící v Ω, jejichž některý soused neleží v $\overline{\Omega}$ nazýváme *neregulární uzly*. Pokud Ω je mnohoúhelník, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, můžeme zkonstruovat síť tak, aby neobsahovala neregulární uzly. U oblastí s komplikovanější hranicí to však obecně nelze.

Pro diskretizaci úlohy (115) se nabízí levou stranu parciální diferenciální rovnice rozderivovat a derivace funkce u aproximovat diferenčními kvocienty uvažovanými dříve. Označíme-li $b = -a_x$, $c = -a_y$, můžeme rovnici (115) zapsat ve tvaru

$$(116) \qquad -a\,\Delta\,u + b\,u_x + c\,u_y = f \quad \text{v } \Omega$$