

a v regulárních uzlech (x_r, y_s) aproximovat použitím centrálních diferencí, čímž získáme

$$(117) \quad -a_{r,s} \left(\frac{\delta_x^2 U_{r,s}}{h_x^2} + \frac{\delta_y^2 U_{r,s}}{h_y^2} \right) + b_{r,s} \frac{\Delta_{0x} U_{r,s}}{h_x} + c_{r,s} \frac{\Delta_{0y} U_{r,s}}{h_y} = f_{r,s}.$$

Snadno lze ukázat, že chyba diskretizace je druhého řádu v h_x a h_y . Později uvidíme, že k platnosti diskrétního principu maxima je potřeba, aby koeficienty schématu (117) v uzlech sousedících s uzlem (x_r, y_s) byly nekladné. Avšak koeficient u $U_{r-1,s}$ je roven $-(2a_{r,s} + b_{r,s}h_x)/(2h_x^2)$ a koeficient u $U_{r+1,s}$ je $-(2a_{r,s} - b_{r,s}h_x)/(2h_x^2)$. Musí tedy být $|b_{r,s}|h_x \leq 2a_{r,s}$ a podobně $|c_{r,s}|h_y \leq 2a_{r,s}$. Z toho tedy plyne, že tam, kde a je malé, ale rychle se mění (a má tudíž velké první derivace), musíme použít dostatečně jemnou síť.

Je proto výhodnější diskretizovat přímo rovnici (115), která má podle definice divergence tvar

$$-(a u_x)_x - (a u_y)_y = f \quad \text{v } \Omega.$$

Ukažme si podrobně aproximaci výrazu $(a u_x)_x$ v regulárním uzlu (x_r, y_s) . Označíme-li $x_{r \pm \frac{1}{2}} := x_r \pm \frac{1}{2} h_x$, pak

$$\begin{aligned} (a u_x)_x(x_r, y_s) &\approx \frac{(a u_x)(x_{r+\frac{1}{2}}, y_s) - (a u_x)(x_{r-\frac{1}{2}}, y_s)}{h_x} \\ &\approx \frac{1}{h_x} \left(a_{r+\frac{1}{2},s} \frac{u_{r+1,s} - u_{r,s}}{h_x} - a_{r-\frac{1}{2},s} \frac{u_{r,s} - u_{r-1,s}}{h_x} \right) \\ &\approx \frac{1}{h_x^2} \left(a_{r+\frac{1}{2},s} (U_{r+1,s} - U_{r,s}) - a_{r-\frac{1}{2},s} (U_{r,s} - U_{r-1,s}) \right). \end{aligned}$$

Analogicky postupujeme u výrazu $(a u_y)_y$, čímž získáme pro aproximaci rovnice (115) schéma

$$(118) \quad \begin{aligned} &-\frac{1}{h_x^2} \left(a_{r+\frac{1}{2},s} (U_{r+1,s} - U_{r,s}) - a_{r-\frac{1}{2},s} (U_{r,s} - U_{r-1,s}) \right) \\ &-\frac{1}{h_y^2} \left(a_{r,s+\frac{1}{2}} (U_{r,s+1} - U_{r,s}) - a_{r,s-\frac{1}{2}} (U_{r,s} - U_{r,s-1}) \right) = f_{r,s}. \end{aligned}$$

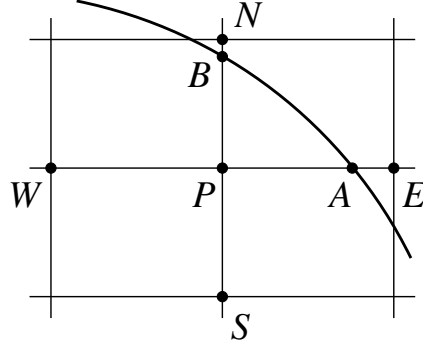
Toto schéma lze zapsat v kompaktním tvaru

$$-\left(\frac{\delta_x(a \delta_x U)}{h_x^2} + \frac{\delta_y(a \delta_y U)}{h_y^2} \right)_{r,s} = f_{r,s}.$$

Je vidět, že koeficienty schématu (118) jsou v uzlech sousedících s uzlem (x_r, y_s) nekladné bez jakéhokoli omezení na síť.

6.4 Diskretizace úlohy (115) v neregulárních uzlech

V této části si ukážeme, jakým způsobem lze diferenční schémata (117) a (118) modifikovat v neregulárních uzlech.



Obrázek 4: Neregulární uzel v blízkosti zakřivené hranice.

Uvažujme nejprve situaci znázorněnou v obr. 4. Uzel P leží v oblasti Ω v blízkosti zakřivené hranice, přičemž jeho sousední uzly S a W leží v $\bar{\Omega}$, zatímco zbývající dva sousední uzly E a N v $\bar{\Omega}$ neleží. Průsečík hranice s úsečkou PE je označen A a průsečík hranice s úsečkou PN je označen B . Předpokládejme, že na uvažované části hranice je předepsána Dirichletova okrajová podmínka (tj. v (115) je $\alpha_0 > 0$ a $\alpha_1 = 0$). V bodech A a B tudíž známe hodnoty řešení u a tedy i přibližného řešení U .

Nechť $|PA| = \theta h_x$, $\theta \in (0, 1)$. Pak hodnoty funkce u v bodech A a W můžeme vyjádřit pomocí následujících Taylorových rozvojų:

$$u_A = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(P) (\theta h_x)^k, \quad u_W = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(P) (-h_x)^k.$$

Tedy

$$\begin{aligned} u_A + \theta u_W &= (1 + \theta) u_P + \frac{1}{2} \theta (1 + \theta) u_{xx}(P) h_x^2 + O(\theta h_x^3), \\ u_A - \theta^2 u_W &= (1 - \theta^2) u_P + \theta (1 + \theta) u_x(P) h_x + O(\theta^2 h_x^3), \end{aligned}$$

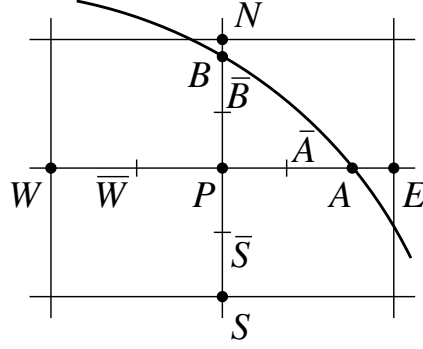
z čehož plyne

$$(119) \quad u_x(P) = \frac{u_A - \theta^2 u_W - (1 - \theta^2) u_P}{\theta (1 + \theta) h_x} + O(h_x^2),$$

$$(120) \quad u_{xx}(P) = \frac{u_A + \theta u_W - (1 + \theta) u_P}{\frac{1}{2} \theta (1 + \theta) h_x^2} + O(h_x).$$

Podobně můžeme postupovat pro body S , P , B a odvodit aproximace derivací $u_y(P)$ a $u_{yy}(P)$. Dosazením do (116) získáme modifikaci schématu (117) v neregulárním uzlu P . Pro platnost principu maxima musíme samozřejmě obecně opět požadovat omezení kroku sítě, jako tomu bylo v regulárních uzlech.

Aproximujeme-li přímo rovnici (115), můžeme i v neregulárním uzlu postupovat analogicky jako při odvození schématu (118). Označíme \bar{A} , \bar{B} , \bar{W} a \bar{S} středy úseček PA , PB ,



Obrázek 5: Další značení v okolí neregulárního uzlu.

PW a PS , viz obr. 5, a uvažujeme aproximace

$$\begin{aligned}
 (a u_x)_x(P) &\approx \frac{(a u_x)(\bar{A}) - (a u_x)(\bar{W})}{|\bar{A} - \bar{W}|} \\
 &\approx \frac{1}{\frac{1}{2}|\bar{A}\bar{W}|} \left(a_{\bar{A}} \frac{u_A - u_P}{|\bar{A}P|} - a_{\bar{W}} \frac{u_P - u_W}{|\bar{W}P|} \right) \\
 &\approx \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \theta) h_x} \left(a_{\bar{A}} \frac{U_A - U_P}{\theta h_x} - a_{\bar{W}} \frac{U_P - U_W}{h_x} \right).
 \end{aligned}$$

Analogicky lze aproximovat $(a u_y)_y$. Označíme-li $\phi := |PB|/h_y$, dostáváme v bodě P síťovou rovnici

$$\begin{aligned}
 (121) \quad &-\frac{1}{\frac{1}{2}\theta(1 + \theta)h_x^2} \left(a_{\bar{A}}(U_A - U_P) - \theta a_{\bar{W}}(U_P - U_W) \right) \\
 &-\frac{1}{\frac{1}{2}\phi(1 + \phi)h_y^2} \left(a_{\bar{B}}(U_B - U_P) - \phi a_{\bar{S}}(U_P - U_S) \right) = f_P.
 \end{aligned}$$

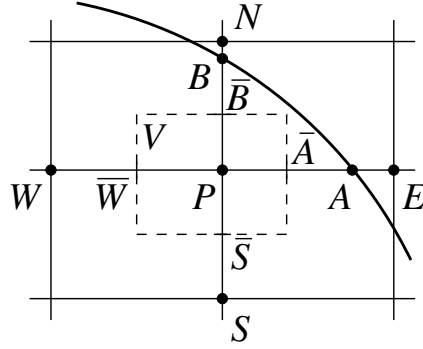
Pro $\theta = \phi = 1$ získáváme rovnici (118). Je-li $a = \text{const.}$, je síťová rovnice shodná se síťovou rovnicí získanou pomocí (120). Výhodou (121) však je, že v obecném případě koeficienty splňují podmínky požadované pro princip maxima, aniž by bylo nutno omezit velikost kroku sítě.

Rovnici (121) lze též odvodit pomocí integrálního tvaru rovnice (115). Nechť V je obdélník (tzv. *kontrolní objem*), jehož hrany jsou rovnoběžné se síťovými přímkami a procházejí body \bar{A} , \bar{B} , \bar{W} a \bar{S} , viz obr. 6. Integrací rovnice (115) přes kontrolní objem V a aplikací Gaussovy věty o integraci získáme

$$(122) \quad \int_V f \, dx = - \int_V \text{div}(a \nabla u) \, dx = - \int_{\partial V} a \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma,$$

kde n je vnější jednotková normála k ∂V . Pro levou stranu identity (122) použijeme aproximaci

$$\int_V f \, dx \approx |V| f_P = \frac{1}{4} (1 + \theta)(1 + \phi) h_x h_y f_P.$$



Obrázek 6: Konstrukce obdélníku V .

Integrál na pravé straně identity (122) rozdělíme na integrály přes jednotlivé hrany obdélníku V a každý z nich aproximujeme zvlášť. Např. integrál přes hranu V procházející bodem \bar{S} můžeme aproximovat výrazem

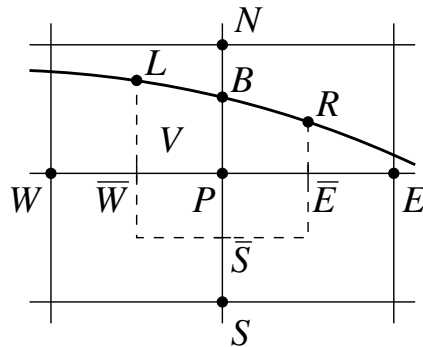
$$\frac{1}{2} (1 + \theta) h_x a_{\bar{S}} \frac{\partial u}{\partial n}(\bar{S}) \approx \frac{1}{2} (1 + \theta) h_x a_{\bar{S}} \frac{U_S - U_P}{h_y}.$$

Aproximujeme-li obdobně integrály přes ostatní hrany V , získáme síťovou rovnici (121).

Použití integrálního tvaru (122) pro odvození síťové rovnice v neregulárním uzlu je zejména výhodné, pokud je na části hranice v blízkosti tohoto uzlu předepsána okrajová podmínka obsahující derivaci, neboť pak je odvození vhodné diskretizace podstatně komplikovanější než v dirichletovském případě. Pro jednoduchost předpokládejme, že hranice oblasti Ω v blízkosti neregulárního uzlu P protíná pouze svislé síťové přímky (viz obr. 7) a že je na této části hranice předepsána Neumannova okrajová podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g$$

(tj. v (115) je $\alpha_0 = 0$ a $\alpha_1 = 1$). Kontrolní objem V nyní definujeme tak, že část jeho hranice je tvořena částí LBR hranice oblasti Ω a zbývající část jeho hranice sestává z úseček kolmých k síťovým přímkám a protínajících úsečky PE , PW a PS v jejich



Obrázek 7: Konstrukce kontrolního objemu V v blízkosti neumannovské hranice.