

středech $\overline{E}$, $\overline{W}$ a $\overline{S}$. Označíme $|\overline{W}L| = \phi_1 h_y$, $|\overline{E}R| = \phi_2 h_y$ a $|LR| = \psi h_x$. V integrálním tvaru (122) aproximujeme levou stranu vztahem

$$\int_V f \, dx \approx \frac{1}{2} (1 + \phi_1 + \phi_2) h_x h_y f_P,$$

integrály přes rovné části ∂V aproximujeme analogicky jako výše a pro integrál přes oblouk LBR použijeme vztah

$$\int_{LBR} a \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \approx a_B g_B \psi h_x.$$

To vede k diferenční rovnici

$$(123) \quad -\frac{2\phi_2 + 1}{(1 + \phi_1 + \phi_2) h_x^2} a_{\overline{E}} (U_E - U_P) - \frac{2\phi_1 + 1}{(1 + \phi_1 + \phi_2) h_x^2} a_{\overline{W}} (U_W - U_P) \\ - \frac{2}{(1 + \phi_1 + \phi_2) h_y^2} a_{\overline{S}} (U_S - U_P) = f_P + \frac{2\psi a_B g_B}{(1 + \phi_1 + \phi_2) h_y}.$$

Pokud hranice oblasti Ω protíná síťové přímky v blízkosti uzlu P tak jako na obr. 4, je základní myšlenka odvození síťové rovnice v uzlu P stejná jako výše, avšak konstrukce kontrolního objemu V a aproximace integrálu přes jeho hranici je komplikovanější.

6.5 Princip maxima pro diskretizace eliptických úloh

Předpokládejme, že jsme diskretizací úlohy (107) či jiné lineární eliptické úlohy získali v každém bodě $P \in N_\Omega$ síťovou rovnici

$$(124) \quad L_h U_P = f_P + q_P,$$

kde q_P je určeno okrajovými podmínkami jinými než dirichletovskými. Příkladem síťové rovnice s nenulovým členem q_P je rovnice (123). Množina N_Ω obsahuje všechny uzly ležící v oblasti Ω , ale může obsahovat i některé body na hranici Ω , v nichž je předepsána jiná okrajová podmínka než dirichletovská. Dále zavádíme množinu $N_{\partial\Omega}$ sestávající z bodů na hranici Ω , v nichž je předepsána Dirichletova okrajová podmínka. Body množiny $N_{\partial\Omega}$ mohou náležet mezi uzly sítě pokrývající oblast Ω nebo mohou být průsečíky síťových přímek s hranicí $\partial\Omega$ jako např. body A a B v obr. 4. Přibližné řešení $\{U_P\}$ v rovnici (124) představuje množinu hodnot v bodech množiny $N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}$.

Činíme následující předpoklady o operátoru L_h a množinách N_Ω a $N_{\partial\Omega}$:

(P1) Pro každé $P \in N_\Omega$ definujeme množinu $N_P \subset (N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}) \setminus \{P\}$ a předpokládáme, že

$$(125) \quad L_h U_P = c_P U_P - \sum_{Q \in N_P} c_{PQ} U_Q,$$

kde

$$(126) \quad c_{PQ} > 0 \quad \forall Q \in N_P, \quad c_P \geq \sum_{Q \in N_P} c_{PQ}.$$

(P2) Množina N_Ω je souvislá v tom smyslu, že

$$\forall P, Q \in N_\Omega \quad \exists P_1, \dots, P_m \in N_\Omega : \\ P_1 \in N_P, P_2 \in N_{P_1}, \dots, P_m \in N_{P_{m-1}}, Q \in N_{P_m}.$$

(P3) $\exists P \in N_\Omega, Q \in N_{\partial\Omega} : Q \in N_P$.

Lze snadno ověřit, že rovnice (108), (118), (121) a (123) splňují (125) a (126) (místo druhé nerovnosti v (126) platí ve všech čtyřech případech rovnost). Pro diskretizaci (108) Poissonovy rovnice je splněn též předpoklad (P2) o souvislosti množiny N_Ω . Předpoklad (P3) implikuje, že na části hranice oblasti Ω je předepsána Dirichletova okrajová podmínka. Pro diskretizace (108) i (121) je předpoklad (P3) zřejmě splněn.

Nyní zformulujeme a dokážeme diskrétní princip maxima pro výše uvedený operátor L_h .

Věta 10 *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Pak pro libovolnou síťovou funkci $\{U_P\}_{P \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}}$ platí*

$$(127) \quad L_h U_P \leq 0 \quad \forall P \in N_\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{P \in N_\Omega} U_P \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} U_Q^+,$$

$$(128) \quad L_h U_P \geq 0 \quad \forall P \in N_\Omega \quad \Rightarrow \quad \min_{P \in N_\Omega} U_P \geq \min_{Q \in N_{\partial\Omega}} U_Q^-,$$

kde $U_Q^+ = \max\{U_Q, 0\}$, $U_Q^- = \min\{U_Q, 0\}$. Speciálně

$$(129) \quad L_h U_P = 0 \quad \forall P \in N_\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{P \in N_\Omega} |U_P| \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} |U_Q|.$$

Důkaz. Nechť platí levá strana implikace (127) a označme $M_\Omega := \max_{P \in N_\Omega} U_P$ a $M_{\partial\Omega} := \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} U_Q$. Je-li $M_\Omega \leq 0$, pak (127) triviálně platí. Nechť tedy $M_\Omega > 0$ a předpokládejme, že $M_\Omega > M_{\partial\Omega}$. Nechť $P^* \in N_\Omega$ je takový, že $M_\Omega = U_{P^*}$. Pak

$$(130) \quad M_\Omega = U_{P^*} \leq \frac{1}{c_{P^*}} \sum_{Q \in N_{P^*}} c_{P^*Q} U_Q \leq M_\Omega,$$

kde první nerovnost plyne z toho, že $L_h U_{P^*} \leq 0$, a druhá z (126). Vztah (130) může platit pouze tehdy, pokud v něm platí rovnost, a z (126) pak plyne, že $U_Q = M_\Omega$ pro všechna $Q \in N_{P^*}$. Ze souvislosti množiny N_Ω formulované v předpokladu (P2) pak plyne, že $U_P = M_\Omega$ pro všechna $P \in N_\Omega$. Konečně z předpokladu (P3) plyne, že existuje $Q \in N_{\partial\Omega}$ takové, že $U_Q = M_\Omega$, což je spor s předpokladem, že $M_\Omega > M_{\partial\Omega}$. Je tedy $M_\Omega \leq M_{\partial\Omega}$, tj. platí (127).

Platí-li levá strana implikace (128), pak $\{-U_P\}_{P \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}}$ splňuje levou stranu implikace (127), a tudíž

$$-\min_{P \in N_\Omega} U_P = \max_{P \in N_\Omega} (-U_P) \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} (-U_Q)^+ = \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} (-U_Q^-) = -\min_{Q \in N_{\partial\Omega}} U_Q^-,$$

tj. platí (128).

Platí-li levá strana implikace (129), pak $\{U_P\}_{P \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}}$ i $\{-U_P\}_{P \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}}$ splňují levou stranu implikace (127), a tudíž pro libovolné $P \in N_\Omega$ platí

$$U_P \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} U_Q^+, \quad -U_P \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} (-U_Q)^+ \quad \Rightarrow \quad |U_P| \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} |U_Q|,$$

což dává (129). □

Důsledek 1 *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a navíc*

$$(131) \quad c_P = \sum_{Q \in N_P} c_{PQ} \quad \forall P \in N_\Omega.$$

Pak pro libovolnou síťovou funkci $\{U_P\}_{P \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}}$ platí

$$(132) \quad L_h U_P \leq 0 \quad \forall P \in N_\Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{P \in N_\Omega} U_P \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} U_Q,$$

$$(133) \quad L_h U_P \geq 0 \quad \forall P \in N_\Omega \quad \Rightarrow \quad \min_{P \in N_\Omega} U_P \geq \min_{Q \in N_{\partial\Omega}} U_Q.$$

Důkaz. Nechť platí levá strana implikace (132) a označme $M := \min_{Q \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}} U_Q$. Buď $\tilde{U}_P := U_P - M$ pro všechna $P \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}$. Pak $\tilde{U}_P \geq 0$ pro všechna $P \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}$ a díky (131) je $L_h \tilde{U}_P = L_h U_P \leq 0$ pro všechna $P \in N_\Omega$. Použitím (127) získáme

$$\left(\max_{P \in N_\Omega} U_P \right) - M = \max_{P \in N_\Omega} \tilde{U}_P \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} \tilde{U}_Q^+ = \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} \tilde{U}_Q = \left(\max_{Q \in N_{\partial\Omega}} U_Q \right) - M,$$

z čehož plyne (132). Implikace (133) se získá přechodem k $\{-U_P\}_{P \in N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}}$ a aplikací implikace (132), analogicky jako bylo získáno (128) z (127) v důkazu věty 10. □

Stejně jako ve spojitém případě plyne z diskrétního principu maxima formulovaného ve větě 10 jednoznačnost řešení úlohy

$$(134) \quad L_h U_P = f_P + q_P \quad \forall P \in N_\Omega,$$

$$(135) \quad U_P = g_P \quad \forall P \in N_{\partial\Omega},$$

kde $g_P := g(P)$ udává Dirichletovu okrajovou podmínku v bodě P . Jelikož úloha (134)–(135) je lineární a konečně rozměrná, plyne z jednoznačnosti též existence řešení, jak ukážeme v následující větě.

Věta 11 *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3). Pak pro libovolnou pravou stranu má úloha (134)–(135) právě jedno řešení.*

Důkaz. Úloze (134)–(135) odpovídá soustava lineárních algebraických rovnic se čtvercovou maticí pro neznámé hodnoty $\{U_P\}_{P \in N_\Omega}$. Úloha je tedy jednoznačně řešitelná právě tehdy, když homogenní soustava má pouze triviální řešení. Je-li však pravá strana v (134)–(135) nulová, dostáváme z (129) ihned, že $U_P = 0$ pro všechna $P \in N_\Omega$. □

6.6 Odhad chyby aproximace

V této části odvodíme obecné odhady chyby aproximace pro úlohu (134)–(135), přičemž zobecníme odhad chyby aproximace provedený na začátku této kapitoly pro diskretizaci Poissonovy rovnice.

Nechť u je řešení spojitě úlohy, kterou aproximujeme pomocí diskretizace (134)–(135). Jako obvykle zavádíme chybu diskretizace

$$\varepsilon_P := L_h u_P - f_P - q_P \quad \forall P \in N_\Omega,$$

kde $u_P = u(P)$. Předpokládáme, že přibližné řešení splňuje stejné Dirichletovy okrajové podmínky jako řešení přesné, tj. $U_P = u(P)$ pro všechna $P \in N_{\partial\Omega}$. Pak chyba aproximace $e_P := U_P - u_P$ opět splňuje

$$L_h e_P = -\varepsilon_P \quad \forall P \in N_\Omega, \quad e_P = 0 \quad \forall P \in N_{\partial\Omega}.$$

Věta 12 *Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a nechť Φ je nezáporná síťová funkce definovaná na $N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}$ splňující*

$$L_h \Phi_P \leq -1 \quad \forall P \in N_\Omega.$$

Pak pro chybu aproximace odpovídající diskretizaci (134)–(135) platí odhad

$$\max_{P \in N_\Omega} |e_P| \leq \left(\max_{Q \in N_{\partial\Omega}} \Phi_Q \right) \left(\max_{P \in N_\Omega} |\varepsilon_P| \right).$$

Důkaz. Buď $D := \max_{P \in N_\Omega} |\varepsilon_P|$. Pak

$$L_h(D \Phi_P \pm e_P) = D L_h \Phi_P \mp \varepsilon_P \leq -D \mp \varepsilon_P \leq 0 \quad \forall P \in N_\Omega,$$

a tudíž podle (127) platí pro libovolné $P \in N_\Omega$

$$\pm e_P \leq D \Phi_P \pm e_P \leq \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} (D \Phi_Q \pm e_Q)^+ = D \max_{Q \in N_{\partial\Omega}} \Phi_Q,$$

z čehož plyne dokazovaný odhad. □

Zatímco odhad chyby diskretizace je poměrně snadný, nalezení srovnávací funkce Φ nemusí být vždy jednoduché. Tato funkce není samozřejmě určena jednoznačně a cílem je nalézt takové Φ , aby $\max_{Q \in N_{\partial\Omega}} \Phi_Q$ bylo co nejmenší.

Pro úlohu (107) a diskretizaci (108)–(109) plyne z věty 12 odhad $|U_P - u_P| \leq C h^2$ pro libovolné $P \in N_\Omega$. Bude-li však mít Ω zakřivenou hranici, získáme odhad $|\varepsilon_P| \leq C h^2$ pouze v regulárních uzlech, zatímco v uzlech u hranice budeme mít obecně jen $|\varepsilon_P| \leq C h$ (viz vztah (120)). Aplikací věty 12 pak dostaneme pouze $|U_P - u_P| \leq C h$ pro $P \in N_\Omega$. Tento odhad však není optimální a lze ho zlepšit použitím následující věty.

Věta 13 *Nechť $N_\Omega = N_1 \cup N_2$, kde $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Nechť jsou splněny předpoklady (P1)–(P3) a nechť Φ je nezáporná síťová funkce definovaná na $N_\Omega \cup N_{\partial\Omega}$ splňující*

$$L_h \Phi_P \leq -C_1 < 0 \quad \forall P \in N_1, \quad L_h \Phi_P \leq -C_2 < 0 \quad \forall P \in N_2.$$

Nechť chyba diskretizace odpovídající úloze (134)–(135) splňuje

$$|\varepsilon_P| \leq D_1 \quad \forall P \in N_1, \quad |\varepsilon_P| \leq D_2 \quad \forall P \in N_2.$$

Pak pro chybu aproximace platí odhad

$$\max_{P \in N_\Omega} |e_P| \leq \left(\max_{Q \in N_{\partial\Omega}} \Phi_Q \right) \max \left\{ \frac{D_1}{C_1}, \frac{D_2}{C_2} \right\}.$$

Důkaz. Označíme-li

$$D := \max \left\{ \frac{D_1}{C_1}, \frac{D_2}{C_2} \right\},$$

můžeme důkaz provést analogicky jako pro větu 12. $\square$

Příklad 2 Uvažujme úlohu (107) s $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. Oblast Ω pokryjeme rovnoměrnou čtvercovou sítí s krokem h a v regulárních uzlech použijeme schéma (108), zatímco v neregulárních uzlech použijeme pro druhé derivace aproximace typu (120). Aplikací věty 13 odvoďte odhad chyby aproximace, který je druhého řádu v h .

Řešení: Nechť N_1 je množina uzlů z N_Ω , jejichž všechny sousední uzly leží v Ω a $N_2 := N_\Omega \setminus N_1$. Podle (113) a (120) platí

$$|\varepsilon_P| \leq K_1 h^2 \quad \forall P \in N_1, \quad |\varepsilon_P| \leq K_2 h \quad \forall P \in N_2.$$

Nechť $\Psi(x, y) = x^2 + y^2$ a položíme

$$\Phi_P = M_1 \Psi(P) \quad \forall P \in N_\Omega, \quad \Phi_P = M_1 \Psi(P) + M_2 \quad \forall P \in N_{\partial\Omega},$$

kde M_1, M_2 jsou kladné konstanty, které budou určeny později. Pak

$$L_h \Phi_P = M_1 L_h \Psi_P = M_1 (-\Delta \Psi)_P = -4 M_1 \quad \forall P \in N_1.$$

Je-li $P \in N_2$, uvažujme např. situaci z obr. 4 a aproximaci $u_{xx}(P)$ pomocí výrazu v (120). Jelikož chyba této aproximace závisí na třetích derivacích u , je tato aproximace pro kvadratické funkce přesná, a proto získáme

$$\frac{\Phi_A + \theta \Phi_W - (1 + \theta) \Phi_P}{\frac{1}{2} \theta (1 + \theta) h^2} = M_1 \Psi_{xx}(P) + \frac{M_2}{\frac{1}{2} \theta (1 + \theta) h^2} \geq 2 M_1 + \frac{M_2}{h^2}.$$

Obdobně postupujeme v ostatních situacích, které mohou nastat, což vede ke vztahu

$$L_h \Phi_P \leq -4 M_1 - \frac{M_2}{h^2} \leq -\frac{M_2}{h^2} \quad \forall P \in N_2.$$

Aplikací věty 13 dostáváme

$$\max_{P \in N_\Omega} |e_P| \leq (M_1 + M_2) \max \left\{ \frac{K_1 h^2}{4 M_1}, \frac{K_2 h^3}{M_2} \right\}.$$

Položíme-li $M_1 = \frac{1}{4} K_1 h^2$ a $M_2 = K_2 h^3$, získáme

$$\max_{P \in N_\Omega} |e_P| \leq \frac{1}{4} K_1 h^2 + K_2 h^3,$$

tj. ukázali jsme, že chyba aproximace je skutečně druhého řádu přesnosti.