Příklady na cvičení k přednášce NMNM338
Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic

1 Základní vztahy metody konečných diferencí

V následujících úlohách se dokazují vztahy udávající, že určitý výraz je roven $O(h^p)$. Tyto vztahy znamenají, že příslušný výraz lze pro libovolný bod x a libovolné h z nějakého okolí nuly omezit hodnotou Ch^p, kde C je konstanta nezávislá na h (ale případně závislá na x).

1. Dokažte, že pro libovolnou funkci $v \in C^2(\mathbb{R})$ platí vztahy

$$\frac{\Delta_+ v}{h} = v' + O(h)\,, \qquad \frac{\Delta_- v}{h} = v' + O(h)\,, \qquad \frac{\Delta_0 v}{h} = v' + O(h)\,, \qquad \frac{\delta v}{h} = v' + O(h)\,.$$

2. Dokažte, že pro libovolnou funkci $v \in C^3(\mathbb{R})$ platí vztahy

$$\frac{\Delta_0 v}{h} = v' + O(h^2)\,, \qquad \frac{\delta v}{h} = v' + O(h^2)\,.$$

Dále ukažte, že pokud funkce $v \in C^3(\mathbb{R})$ pro dané $x \in \mathbb{R}$ a $\alpha > 0$ splňuje

$$\frac{\Delta_+ v}{h}(x) = v'(x) + O(h^{1+\alpha}) \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\Delta_- v}{h}(x) = v'(x) + O(h^{1+\alpha})\,,$$

pak $v''(x) = 0$.

3. Dokažte, že pro libovolnou funkci $v \in C^4(\mathbb{R})$ platí vztah

$$\frac{\delta^2 v}{h^2} = v'' + O(h^2)\,.$$

4. Dokažte, že pro libovolnou funkci $v \in C^6(\mathbb{R})$ platí vztah

$$\frac{\delta^4 v}{h^4} = v^{(4)} + O(h^2)\,.$$

5. Ověřte platnost vztahu

$$\delta^2 = \Delta_+ \Delta_- = \Delta_- \Delta_+\,.$$

6. Dokažte, že pro libovolnou funkci $v \in C^2(\mathbb{R})$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí vztah

$$\frac{v(x+h) + v(x-h)}{2} = v(x) + O(h^2)\,.$$

2 Chyba diskretizace

7. Uvažujme explicitní schéma

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}=b\,\frac{U_{j+1}^n-2\,U_j^n+U_{j-1}^n}{h^2}-a\,\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2\,h}$$

pro numerické řešení rovnice $u_t=b\,u_{xx}-a\,u_x$ s konstantními koeficienty a, b. Nechť u je dvakrát spojitě derivovatelné podle t a čtyřikrát spojitě derivovatelné podle x. Ukažte, že pro chybu diskretizace platí vztah

$$\varepsilon_j^n=\frac{1}{2}\,u_{tt}(x_j,\eta)\,\tau-\frac{b}{12}\,u_{xxxx}(\xi,t_n)\,h^2+\frac{a}{6}\,u_{xxx}(\zeta,t_n)\,h^2\,,$$

kde $\eta\in(t_n,t_n+\tau)$ a $\xi,\zeta\in(x_j-h,x_j+h)$. Zjistěte, jak se tento vztah změní, budeme-li místo uvedeného schématu uvažovat implicitní schéma

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}=b\,\frac{U_{j+1}^{n+1}-2\,U_j^{n+1}+U_{j-1}^{n+1}}{h^2}-a\,\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_{j-1}^{n+1}}{2\,h}\,.$$

8. Uvažujme schéma Crankovo–Nicolsonové

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}=b\,\frac{\delta_x^2\,U_j^{n+1}+\delta_x^2\,U_j^n}{2\,h^2}-a\,\frac{\Delta_{0x}\,U_j^{n+1}+\Delta_{0x}\,U_j^n}{2\,h}$$

pro numerické řešení rovnice $u_t=b\,u_{xx}-a\,u_x$ s konstantními koeficienty a, b. Nechť $u\in C^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+)$. Ukažte, že pro chybu diskretizace platí vztah

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^n=&\left[\frac{1}{24}\,u_{ttt}(x_j,\eta_1)-\frac{b}{8}\,u_{xxtt}(x_j,\eta_2)+\frac{a}{8}\,u_{xtt}(x_j,\eta_3)\right]\tau^2\\&-\frac{b}{12}\,u_{xxxx}(\xi,\eta_4)\,h^2+\frac{a}{6}\,u_{xxx}(\zeta,\eta_5)\,h^2\,,\end{aligned}$$

kde $\eta_1,\dots,\eta_5\in(t_n,t_n+\tau)$ a $\xi,\zeta\in(x_j-h,x_j+h)$.

9. Pro numerické řešení rovnice $u_t=b\,u_{xx}$ s konstantním koeficientem b uvažujme schéma tvaru

$$U_j^{n+1}=(1-2\,\alpha_1-2\,\alpha_2)\,U_j^n+\alpha_1\,(U_{j+1}^n+U_{j-1}^n)+\alpha_2\,(U_{j+2}^n+U_{j-2}^n)\,.$$

Uvažujme posloupnost sítí takovou, že $\mu:=b\,\tau/h^2$ je konstantní. Zjistěte, za jaké podmínky na α_1, α_2 je schéma konzistentní. Nalezněte hodnoty α_1, α_2 takové, aby schéma bylo čtvrtého řádu přesnosti v x.

3 Fourierova transformace a amplifikační faktor

10. Uvažujme Cauchyovu úlohu najít funkci $u=u(x,t)$ definovanou pro $x\in\mathbb{R}$ a $t\geq 0$ a splňující parciální diferenciální rovnici

$$u_t=b\,u_{xx}-a\,u_x\qquad\text{v }\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

s konstantami $a \in \mathbb{R}$ a $b > 0$ a počáteční podmínkou

$$u(x,0) = u^0(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Vypočítejte Fourierovou transformaci $\hat{u} = \hat{u}(\xi, t)$ řešení u.

Nechť $\lambda = \lambda(\xi)$ je amplifikační faktor odpovídající zvolenému jednokrokovému schématu pro řešení uvedené úlohy. Pak diskrétní Fourierova transformace $\widehat{U}^n(\xi)$ přibližného řešení (která by měla aproximovat $u(\xi, t_n)$) splňuje $\widehat{U}^n(\xi) = \lambda(\xi)^n\, \widehat{U}^0(\xi)$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Nutná a postačující podmínka stability přibližného řešení vzhledem k diskrétní L^2 normě je vyjádřena von Neumannovou podmínkou $|\lambda(\xi)| \le 1 + K\,\tau$ (viz příslušnou větu z přednášky pro přesnou formulaci). Srovnejte chování $|\hat{u}(\xi, t_n)|$ vzhledem k n s tím, jak se může chovat $|\widehat{U}^n(\xi)|$ při splnění von Neumannovy podmínky.

11. Uvažujme obecné jednokrokové schéma na stejnoměrné síti s prostorovým krokem h a časovým krokem τ tvaru

$$\sum_{s=-M}^{M} \alpha_s\, U_{j+s}^{n+1} = \sum_{s=-M}^{M} \beta_s\, U_{j+s}^{n} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,,$$

kde α_s a β_s jsou reálná čísla. Předpokládejme, že přibližné řešení je pro libovolnou počáteční podmínku v čase t_0 tímto schématem určeno jednoznačně. Dokažte, že pak

$$\sum_{s=-M}^{M} \alpha_s\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, s\, h\, \xi} \neq 0 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,.$$

4 Numerické řešení transportní rovnice

Ve všech úlohách, v nichž je požadováno vyšetření stability, je míněna stabilita vzhledem k diskrétní L^2 normě. Rychlost a je ve všech úlohách konstantní.

12. Vyšetřete chybu diskretizace a stabilitu Laxova–Friedrichsova schématu pro rovnici $u_t + a\, u_x = 0$, tj. schématu

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}\,(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\,h} = 0\,.$$

13. Uvažujme schéma

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{\nu}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)\,,\\
U_j^{n+1} &= \frac{1}{4}(\tilde{U}_{j+1}^{n+1} + 2\,\tilde{U}_j^{n+1} + \tilde{U}_{j-1}^{n+1})
\end{aligned}$$

pro rovnici $u_t + a\, u_x = 0$. Vyšetřete chybu diskretizace a stabilitu.

14. Uvažujme schéma tvaru $U_j^{n+1} = \alpha\, U_j^n + \beta\, U_{j+1}^n$ a ukažte, že

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^n|^2 \le (|\alpha| + |\beta|)^{2n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^0|^2\,.$$

Co z toho plyne pro stabilitu schématu

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} = 0$$

pro řešení rovnice $u_t + a\,u_x = 0$?

15. Ukažte, že schéma tvaru $U_j^{n+1} = \alpha\,U_{j+1}^n + \beta\,U_{j-1}^n$ je stabilní pro $|\alpha| + |\beta| \le 1$. Co z toho plyne pro Laxovo–Friedrichsovo schéma?

16. Uvažujme *leapfrog scheme* $U_j^{n+1} - U_j^{n-1} + \nu\,(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) = 0$. Ukažte, že po přenásobení členem $U_j^{n+1} + U_j^{n-1}$ a sečtení přes $j \in \mathbb{Z}$ získáme

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{|U_j^{n+1}|^2 + |U_j^n|^2 + \nu\,(U_j^{n+1}\,U_{j+1}^n - U_{j+1}^{n+1}\,U_j^n)\right\}$$
$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{|U_j^n|^2 + |U_j^{n-1}|^2 + \nu\,(U_j^n\,U_{j+1}^{n-1} - U_{j+1}^n\,U_j^{n-1})\right\}.$$

Ukažte, že z toho plyne stabilita schématu pro $|\nu| < 1$.

17. Uvažujme implicitní schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\,h} = 0$$

pro rovnici $u_t + a\,u_x = 0$. Vyšetřete chybu diskretizace a stabilitu.

18. Uvažujme implicitní schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$$

pro rovnici $u_t + a\,u_x = 0$, kde $a > 0$. Vyšetřete chybu diskretizace a stabilitu.

19. Uvažujme implicitní schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{h} = 0$$

pro rovnici $u_t + a\,u_x = 0$. Vyšetřete chybu diskretizace a stabilitu.

20. Ukažte, že pro $\tau = h^2$ je schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\,h} = 0$$

stabilní a konzistentní s rovnicí $u_t + a\,u_x = 0$.

21. Vyšetřete stabilitu a konzistenci následujícího schématu pro rovnici $u_t + a\,u_x = f$:

$$U_j^{n+\frac12} = U_j^n - \frac{\nu}{2}\,(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \tau\,f_j^n\,,$$
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\nu}{2}\,(U_{j+1}^{n+\frac12} - U_{j-1}^{n+\frac12}) + \tau\,f_j^{n+1}\,.$$

22. Ukažte, že *MacCormackovo schéma*

$$\tilde{U}_j^{n+1} = U_j^n - \nu\,(U_{j+1}^n - U_j^n) + \tau\, f_j^n\,,$$
$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\,\Big\{U_j^n + \tilde{U}_j^{n+1} - \nu\,(\tilde{U}_j^{n+1} - \tilde{U}_{j-1}^{n+1}) + \tau f_j^{n+1}\Big\}$$

je schéma druhého řádu přesnosti pro rovnici $u_t + a\,u_x = f$. Ukažte, že pro $f = 0$ je identické s Laxovým–Wendroffovým schématem

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\,h} - \frac{a^2\,\tau}{2}\,\frac{U_{j+1}^n - 2\,U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} = 0\,.$$

23. Vypočítejte fázovou chybu Laxova–Wendroffova schématu pro rovnici $u_t + a\,u_x = 0$.

24. Ukažte, že *box scheme*

$$\frac{1}{2\tau}\left[(U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}) - (U_j^n + U_{j+1}^n)\right] + \frac{a}{2h}\left[(U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) + (U_{j+1}^n - U_j^n)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left(f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1} + f_{j+1}^n + f_j^n\right)$$

je aproximace rovnice $u_t + a\,u_x = f$, která je 2. řádu přesnosti a stabilní pro všechna $\nu \in \mathbb{R}$.

25. Uvažujme následující variantu *leapfrog scheme*

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\,\tau} + a\left(1 - \frac{\delta_x^2}{6}\right)\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\,h} = f_j^n\,.$$

Které uzly pro U schéma spojuje? Vyšetřete chybu diskretizace při aproximaci rovnice $u_t + au_x = f$ a zjistěte za jakých podmínek je schéma stabilní.

26. Uvažujme modifikované schéma Crankovo–Nicolsonové

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{4\,h} + \frac{\varepsilon}{\tau}\left(\frac{\delta_x}{2}\right)^4 U_j^n = \frac{1}{2}\left(f_j^{n+1} + f_j^n\right)$$

pro numerické řešení rovnice $u_t + a\,u_x = f$. Ukažte, že toto schéma je druhého řádu přesnosti, disipativní řádu 4 pro $\varepsilon \in (0, 2)$ a vyšetřete, kdy je stabilní.

27. Uvažujme schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} = 0$$

pro numerické řešení rovnice $u_t + a\,u_x = 0$. Vypočítejte fázovou chybu a zjistěte, kdy je splněn princip maxima.

28. Uvažujme schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}\,(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\,h} = 0$$

pro numerické řešení rovnice $u_t + a\,u_x = 0$. Vypočítejte fázovou chybu a zjistěte, kdy je splněn princip maxima.

5 Numerické řešení rovnice vedení tepla

29. Uvažujme soustavu rovnic

$$X_{j+1} + 2\,\alpha\,X_j + X_{j-1} = 0\,, \quad j = 1,\ldots,N-1\,, \qquad X_0 = X_N = 0\,.$$

Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha\in\mathbb{R}$ má tato úloha netriviální řešení, a tato řešení vypočítejte.

30. Metodou separace proměnných najděte řešení úlohy

$$\begin{aligned}
&\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{U_{j+1}^n - 2\,U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}\,, \qquad j = 1,\ldots,J-1\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,,\\
&U_0^n = U_J^n = 0\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,,\\
&U_j^0 = u^0(x_j)\,, \quad j = 0,\ldots,J\,,
\end{aligned}$$

kde $h = 1/J$ a $x_j = j\,h$, $j = 0,\ldots,J$. Předpokládejte, že Fourierovy koeficienty $a_m = 2\int_0^1 u^0(x)\sin(m\,\pi\,x)\,\mathrm{d}x$ splňují $\sum_{m=1}^\infty |a_m| < \infty$.

31. Vyšetřete, kdy je explicitní schéma (64) z přednášky disipativní řádu 2.

32. Vyšetřete, kdy je implicitní schéma (77) z přednášky disipativní řádu 2.

33. Vyšetřete, kdy je θ-schéma (90) z přednášky disipativní řádu 2.

34. Ukažte, že schéma Crankovo–Nicolsonové pro rovnici vedení tepla v 1D (tj. θ-schéma (90) s $\theta = 1/2$) není disipativní pro $h = O(\tau)$.

35. Ukažte, že oba kořeny kvadratické rovnice $z^2 + b\,z + c = 0$, kde $b, c \in \mathbb{R}$, leží v uzavřeném jednotkovém kruhu právě tehdy, když $|c| \le 1$ a $|b| \le 1 + c$.

36. Uvažujme schéma

$$U_j^{n+1} - U_j^{n-1} = \frac{2}{3}\,\mu\left\{\delta_x^2\,U_j^{n+1} + \delta_x^2\,U_j^n + \delta_x^2\,U_j^{n-1}\right\}\,, \qquad \mu = \frac{\tau}{h^2}\,,$$

pro řešení rovnice $u_t = u_{xx}$. Vyšetřete jeho stabilitu a chybu diskretizace.

37. Vyšetřete stabilitu schématu

$$U_j^{n+1} - U_j^{n-1} = \frac{\mu}{3}\left\{\delta_x^2\,U_j^{n+1} + 4\,\delta_x^2\,U_j^n + \delta_x^2\,U_j^{n-1}\right\}\,, \qquad \mu = \frac{\tau}{h^2}\,,$$

pro řešení rovnice $u_t = u_{xx}$.

38. Buď $\theta \in [0,1]$ a uvažujme schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\,\tau} = \frac{\theta\,\delta_x^2\,U_j^n + (1-\theta)\,\delta_x^2\,U_j^{n-1}}{h^2}$$

pro řešení rovnice $u_t = u_{xx}$ v $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. Vyšetřete stabilitu tohoto schématu.

39. Uvažujme Dufortovo–Frankelovo schéma

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^{n-1}}{2\,\tau}=\frac{U_{j+1}^n-(U_j^{n+1}+U_j^{n-1})+U_{j-1}^n}{h^2}$$

pro řešení rovnice $u_t = u_{xx}$. Vyšetřete jeho stabilitu, chybu diskretizace a disipativnost.

40. Nechť body dělení splňují $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{J-1} < x_J = 1$, ale jinak jsou zvoleny libovolně. Označme $h_j = x_{j+1} - x_j$ a aproximujme rovnici $u_t = u_{xx}$ schématem

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}=\frac{2}{h_{j-1}+h_j}\left(\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h_j}-\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h_{j-1}}\right),$$

kde τ je zvolený časový krok. Nalezněte hlavní členy chyby diskretizace. Dále označme $h = \max h_j$ a předpokládejme, že $|h_j - h_{j-1}| \le \alpha\, h^2$, $j = 1, 2, \ldots, J-1$, kde α je konstanta. Předepišme obvyklou počáteční podmínku a Dirichletovy okrajové podmínky. Odvoďte odhad pro chybu aproximace za předpokladu splnění vhodné podmínky stability.

41. Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned}
&u_t = (p(x)\,u_x)_x \quad \text{v } (0,1)\times\mathbb{R}^+\,,\\
&u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall\, t > 0\,,\\
&u(x,0) = u^0(x) \quad \forall\, x \in [0,1]\,,
\end{aligned}$$

kde $p \in C^1([0,1])$ je kladná funkce. K řešení této úlohy lze na rovnoměrné síti s prostorovým krokem h a časový krokem τ použít schéma

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}=\frac{(U_{j+1}^n-U_j^n)\,p_{j+\frac12}-(U_j^n-U_{j-1}^n)\,p_{j-\frac12}}{h^2}\,,$$

kde $p_{j+\frac12} = p(x_j + h/2)$ a $p_{j-\frac12} = p(x_j - h/2)$. Nalezněte hlavní členy chyby diskretizace a odvoďte odhad pro chybu aproximace za vhodné podmínky stability.

42. Uvažujme hermitovské diferenční schéma

$$\left(1+\frac{1}{12}\,\delta_x^2\right)(U_j^{n+1}-U_j^n)=\frac{\mu}{2}\,\delta_x^2(U_j^{n+1}+U_j^n)+\frac{\tau}{2}\left[f_j^{n+1}+\left(1+\frac16\,\delta_x^2\right)f_j^n\right]$$

pro aproximaci rovnice $u_t = u_{xx} + f$, kde $\mu = \tau/h^2$. Ukažte, že $\varepsilon_{h,\tau} = O(\tau^2 + h^4)$.

43. Uvažujme rovnici $u_t = b\,u_{xx} - a\,u_x$, kde $b > 0$ a a jsou konstanty. Ukažte, že nahrazení centrální diference aproximující u_x jednostrannou diferencí typu upwind je ekvivalentní nahrazení b hodnotou $b + |a|h/2$.