

①

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ avažujeme triangulaci $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω sestávající z obdélníků T takových, že libovolné dva různé obdélníky z $\mathcal{T}_h$ mají buď disjunktní vnitř, nebo jejich průnik je společný vrchol či společná hrana. Uvažujeme prostor

$$V_h = \{ v \in L^2(\Omega); v|_T \in \text{span}\{1, x, y, x^2 - y^2\} \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

v je spojitá ve středech vnitřních hran $\mathcal{T}_h$ }.

Definujeme operátor $\pi_h: C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ takový, že

$$\forall v \in C(\bar{\Omega}): \pi_h v = v \quad \text{ve středech všech hran } \mathcal{T}_h.$$

Ukažte, že tato podmínka operátor π_h jednoznačně definuje $\forall v \in C(\bar{\Omega})$.

Dokažte, že platí odhad chyby interpolace

$$\|v - \pi_h v\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 |v|_{2,\Omega} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

předpokládáme, že triangulace $\mathcal{T}_h$ splňuje určitý předpoklad.

(2)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a uvažujme: $\Delta u = f$ v Ω , $u = 0$ na $\partial\Omega$,

$$- \Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

kde $f \in L^2(\Omega)$. Tato Δu diskretizujeme konformní mřížkou
konečných prvků s lineární trojúhelníkovou konečnou prvkem.
Dokažte, že diskretní řešení má splíný je odhad

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|f\|_{2,\Omega}.$$

Přitom lze dále ukázat, že pro pravý směr konečného
prvků na regulárním systému triangulací lagrangeových interpolací
operator na splíný je

$$\|v - v_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|v\|_{2,\Omega}, \quad \|v - v_h\|_{1,\Omega} \leq Ch \|v\|_{2,\Omega} \quad \forall v \in H^2(\Omega)$$

(3)

Nechť je dán na referenčním konečném prvku $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ kvadraturní

$$(*) \quad \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_{\ell} \hat{\varphi}(\hat{b}_{\ell})$$

pro aproximaci integrálu $\int_{\hat{T}} \hat{\varphi} d\hat{x}$, kde $\hat{b}_{\ell} \in \hat{T}$ a $\hat{\omega}_{\ell} > 0$, $\ell=1, \dots, L$.

Uvažujeme triangulaci $\mathcal{T}_h$, jejíž prvky jsou affine ekvivalentní $\hat{T}$, a $\forall T \in \mathcal{T}_h$

definujeme kvadraturní vzorec $\sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,T} \varphi(b_{\ell,T})$, kde $\omega_{\ell,T}$ a

$b_{\ell,T}$ jsou definovány pomocí $\hat{\omega}_{\ell}$ a $\hat{b}_{\ell}$ na základě affine ekvivalence

mezi T a $\hat{T}$. Nechť $\hat{P} \in P_m(\hat{T})$ a kvadraturní vzorec $(*)$ je

přesný pro polynomy stupně $2m-2$. Na každém $T \in \mathcal{T}_h$ uvažujeme

konečný prvek (T, P_T, Σ_T) affine ekvivalentní $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ a

definujeme odpovídající prostor konečných prvků V_h . Nechť

Ω je omezená množina $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ (předpokládáme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$)

a uvažujeme funkce $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$, $i, j=1, \dots, n$, splňující

$$\exists \Theta > 0 : \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \Theta \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Nechť} \quad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \sum_{i,j=1}^n \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx$$

a definujeme bilineární formu a_h tak, že integrály

přes množinu T vypočítáme pomocí výše uvedeného kvadra-

turního vzorce. Uvažte, že bilineární formu a_h jsou stejnoměrně

V_h -eliptické, tj., že $\exists \alpha > 0 : a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v_h \in V_h \quad \forall h > 0$.
(Předp. 1. že 1.1.12 je norma na V_h .)

④

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s polygonální hranicí a T_h její triangulace sestávající z trojúhelníků. Uvažujeme

$$-\nu \Delta u + cu = f \quad \text{v } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde $c, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $c \geq 0$ v Ω , slabá formulace

$$u \in H_0^1(\Omega): \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega); v_h|_T \in P_2(T) \quad \forall T \in T_h\}$. Pro T_h splňující podmínky regularity a kompatibility pro Lagrangeovu interpolaci

$$\Pi_h \text{ splňuje} \quad \|v - \Pi_h v\|_{0,\Omega} + h \|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch^{m+1} \|v\|_{m+1,\Omega}$$

$$\forall v \in H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad m=1, \dots, \infty.$$

$\forall T \in T_h$ definujeme $r_T: C(T) \rightarrow P_1(T)$ tak, že $r_T v = v$ ve vrcholech T $\forall v \in C(T)$. Definujeme diskrétní problém

$$u_h \in V_h: \quad \nu \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx + \sum_{T \in T_h} \int_T (r_T c) u_h v_h \, dx = \sum_{T \in T_h} \int_T (r_T f) v_h \, dx$$

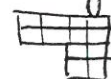
Vyšetřete řád konvergence chyby $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$. $\forall u_h \in V_h$.

5

Nechť $\Omega = \{ (x,y) \in (0,1)^2; x > \frac{1}{2} \text{ nebo } y > \frac{1}{2} \}$, tj. $\Omega =$ .

Paž slabé řešení úlohy

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

kde $f \in L^2(\Omega)$, obecně neležící v $H^2(\Omega)$. Na Ω definujeme triangulaci sestávající ze stejné velikosti čtverců () a

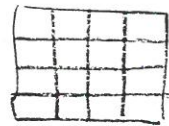
aproximujeme u metodou konečných prvků s prátorem

$$V_h = \{ u \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega); u|_K \in Q_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Ukažte, že $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$.

(6)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a nechť $\mathcal{T}_h$ je triangulace Ω sestávající se stejné velikosti čtvercových elementů T . Pro každý element T definujeme operátor $\Pi_T: C(T) \rightarrow Q_2(T)$ následujícími podmínkami:



$$(\Pi_T v)(x) = v(x) \quad \forall \text{ vrchol } x \in T$$

$$\int_E \Pi_T v \, d\sigma = \int_E v \, d\sigma \quad \forall \text{ hrana } E \subset \partial T$$

$$\int_T \Pi_T v \, dx = \int_T v \, dx,$$

kde $v \in C(T)$ je libovolná funkce. Je operátor Π_T definován jednoznačně?

Pro $v \in C(\bar{\Omega})$ definujeme $\Pi_h v \in L^2(\Omega)$ takové, že

$$(\Pi_h v)|_T = \Pi_T v \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Je funkce $\Pi_h v$ spojitá na $\bar{\Omega}$?

Výšetřete interpolační vlastnosti operátoru Π_h , tj. pro dostatečně regulární fce v odvoďte odhad interpolační chyby v L^2 -normě a H^1 -normě.

8

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a uvažujme úlohu najít fci $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$(*) \quad -\Delta u + u_x + 3u = 1 \quad \text{v } \Omega, \quad u = g \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde g je zadaná funkce. Na Ω definujeme rovinnou triangulaci T_h sestávající ze stejných trojúhelníků o průměru h splňujících obvyklé předpoklady. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}); v|_T \in P_k(T) \quad \forall T \in T_h\}$.

Odvodíte diskretizaci úlohy (*) metodou konečných prvků založenou na prostorech V_h , tj. diskretní řešení u_h náleží do V_h .

Odvodíte nejlepší možný odhad pro chybu $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$.

9

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s polygonální hranicí a T_h její triangulace sestávající z trojúhelníků. Uvažujeme slabou formulaci

$$\text{najít } u \in H^1(\Omega): \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\text{ kde } a_{ij}, f \in C(\bar{\Omega}), \text{ for: } \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\bar{\xi}|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Nechť $V_h \subset H^1(\Omega)$ je prostor po částech lineárních koncových prvcích a definujeme diskrétní problém

$$\text{ najít } u_h \in V_h: \sum_{i,j=1}^2 \sum_{T \in T_h} \int_T a_{ij}(c_T) (u_h)_{x_i} (v_h)_{x_j} dx = \sum_{T \in T_h} \int_T f(c_T) v_h dx$$

kde c_T je těžiště trojúhelníku T . Ukážete, že za určitých předpokladů platí $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch$, $\forall u_h \in V_h$,

kde C nezávisí na h a specifikujte předpoklady, které jsou pro to potřebné.

(10)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, je omezená oblast s polyedrovými hranicemi a nechť $\{T_h\}$ je systém regulárních triangulací Ω sestávající ze simplexů. Na referenčním simplexu $\hat{T}$ definujeme kvadraturní vzorec $\sum_{e=1}^L \hat{\omega}_e \hat{\varphi}(\hat{b}_e)$ pro aproximaci integrálu $\int_{\hat{T}} \hat{\varphi} d\hat{x}$ a předpokládáme, že je přesný pro polynomy stupně $2k-2$, kde $k \in \mathbb{N}$. Pro libovolný simplex $T \in \mathcal{T}_h$ nechť $E_T(\varphi)$ je chyba kvadraturní formule indukované formule na $\hat{T}$ při aplikaci na fci φ . Dokažte, že existuje konstanta C taková, že $\forall T \in \mathcal{T}_h$ platí

$$|E_T(auv)| \leq Ch_T^k \|a\|_{k,\infty,T} \|u\|_{k-1,T} \|v\|_{0,T} \quad \forall a \in W^{k,\infty}(T),$$

$$u, v \in P_{k-1}(T),$$

kde $h_T = \text{diam}(T)$.

(11)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a T_h je triangulace Ω sestávající z trojúhelníků. Na každém trojúhelníku T uvažujeme lineární prvky (T, P_T, Σ_T) , kde

$$P_T = \text{span} \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \},$$

přičemž $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou barycentrické souřadnice vzhledem k vrcholům T , a

$$\Sigma_T = \left\{ v(a_i), \frac{1}{|E_i|} \int_{E_i} v \, d\sigma, \bigvee_{i=1,2,3} \int_T v \, dx \right\},$$

kde a_1, a_2, a_3 jsou vrcholy T a E_1, E_2, E_3 jsou hrany T .

Vypočítejte, zda se jedná o elementární a lineární prvky, a napište definici příslušného prostoru lineárních prvků.

Definujte odpovídající interpolační operátor $\Pi_h: C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ a odvoďte pro něj nejlepší možný odhad chyby interpolace.

(12)

Nechť $\Omega = (0,1)^2$ a T_h je triangulace Ω sestávající z trojúhelníků
a definujte diskretizaci

Ulohy $-\Delta u = f$ v Ω , $u = g$ na $\partial\Omega$,

kde f a g jsou dané funkce. Dále, se pro diskretizaci
řešení u_h platí odhad

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \|u - u_h\|_{1,\Omega},$$

kde C nezávisí na h .