$\theta^1, \theta^2, \theta^3, \ldots \| \theta^M, \theta^{M+1}, \theta^{M+2}, \ldots$

$\uparrow$ St. $\longrightarrow$

$M = \infty$

$P(\theta, T) =$ „prst. přechodu z θ do T"

$\{1, 2, 3, 4, \ldots, 6\}$

$p_{ij} = P(i \to j)$

$P(\theta_1, \theta_2)$

„prst. přechodu z θ do ψ"

$P(\theta, \cdot) \to$ hustota $p(\theta, \psi)$

$$P(\theta, T) = \int_T p(\theta, \psi)\, d\lambda(\psi)$$

$p(\theta, \psi) =$ rozdělení ψ za podm., že jsem v θ

$= p(\psi | \theta)$

$P(\theta^0 \in T_0, \ldots, \theta^{(m)} \in T_m) =$

$$= \int_{T_0} \int_{T_1} \int_{T_2} \ldots p(\theta^1, \theta^2)\, p(\theta^0, \theta^1)\, f_0(\theta^0)\, d\lambda(\theta^0)\, d\lambda(\theta^1)\, d\lambda(\theta^2)$$

$$\int_{T_m} q(t^{m-1}, t^m) \qquad d\lambda(t^m))$$

Proof.

$P(t^0 \in T_0, \dots, \theta^m \in T^m) =$

$P(\theta^0 \in \; P(\theta^m \in T^m \mid \theta^{m-1} \in T^{m-1}, \dots, \theta^0 \in T^0) \cdot$

$\cdot \; P(\underbrace{\theta^{m-1} \in T^{m-1} \mid \theta^{m-2} \in T^{m-2}, \dots, \theta^0 \in T^0)}_{\text{hm}} \cdot$

$P(\underbrace{\theta^1 \in T^1 \mid \theta^0 \in T^0}_{p(\theta^0, \theta^1)}) \cdot \underbrace{P(\theta^0 \in T^0)}_{\approx f_0}$

$\pi(T) = \int_T \pi(\theta) \, d\lambda(\theta)$

$\pi P(T) = \int_\Theta P(\theta, T) \, \pi(\theta) \, d\lambda(\theta)$

π generuje $\theta \xrightarrow{P} T$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1a} \\ \vdots & & \\ p_{a1} & & p_{aa} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$p(\theta, \psi)$

$P(\theta, T) \quad P(\theta, \cdot)$

$T \subset T$

$$\bar\pi P(T) = \int_\Theta \left(\int_T p(\theta,\psi)\, d\lambda(\psi) \right) \bar\pi(\theta)\, d\nu(\theta) =$$

$$= \int_\Theta \int_T p(\theta,\psi)\, \bar\pi(\theta)\, d\lambda(\psi)\, d\nu(\theta) =$$

$$= \int_{T} \boxed{\int_{\Theta} p(\theta,\psi)\, \bar\pi(\theta)\, d\nu(\theta)}\, d\lambda(\psi) = \bar\pi P(T)$$

$\bar\pi P$ = prstní míra

□ je hustota té míry

$\bar\pi P$ má hustotu (vůči ψ)

$$\int_\Theta p(\theta,\psi)\, \bar\pi(\theta)\, d\lambda(\theta)$$

$\bar\pi$ (θ,ψ) → má sdruž. rozdel.,

$$f(\theta,\psi) = f(\psi|\theta)\, f(\theta)$$

$$\downarrow \quad f(\psi) = \int f(\theta,\psi)\,d\theta =$$

$$= \int f(\psi|\theta)\, f(\theta)\, d\theta$$

$\sim p(\theta,\psi)$ $\quad \sim \pi$

$$\theta \longrightarrow \psi$$

π $\quad$?

---

pokud $\theta^{(m-1)} \sim \pi$

pokud $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \ldots$ vznikají postupně aplikací přechodového jádra P

potom $\pi P =$ rozdělení $\theta^{(m)}$

$$\pi P(d\theta) = \pi(d\theta)$$

$$\equiv \forall T \in \mathcal{J} \quad \pi P(T) = \pi(T).$$

$$\int_{\Theta} P(\theta, T)\, \pi(\theta)\, d\theta \qquad \int_T \pi(\theta)\, d\theta$$

$$\|$$

$$\int_T \int_{\Theta} p(\theta,\psi)\, \pi(\theta)\, d\theta\, d\psi$$

$$\int_T P(\theta, S)\,\pi(\theta)\,d\lambda(\theta) \overset{\text{revers.}}{=} \int_S P(\psi, T)\,\pi(\psi)\,d\lambda(\psi)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\underbrace{\int_T \int_S p(\theta,\psi)\,\pi(\theta)\,d\lambda(\theta)\,d\lambda(\psi)}_{\text{sdružená míra na } \Theta\times\Theta,\ \mathcal{T}\otimes\mathcal{T}} \qquad \underbrace{\int_S \int_T p(\psi,\theta)\,\pi(\psi)\,d\lambda(\psi)\,d\lambda(\theta)}_{\text{sdružená míra na } \Theta\times\Theta,\ \mathcal{T}\otimes\mathcal{T}}$$

míra

$= Q_1(T,S)$

s hustotou

$q_1(\theta,\psi) = p(\theta,\psi)\,\pi(\theta)$

míra

$= Q_2(S,T)$

s hustotou

$q_2(\psi,\theta) = p(\psi,\theta)\,\pi(\psi)$

<u>Reversibilita</u> $\equiv \forall T,S \in \mathcal{T}$

$$Q_1(T,S) = Q_2(S,T)$$

- pokud <u>skoro všude</u> (≡ postač. podm. pro reversibilitu)

$$p(\theta,\psi)\,\pi(\theta) = p(\psi,\theta)\,\pi(\psi)$$

POTOM PLATÍ REVERSIBILITA.

$$P^m(\theta, T) = \int_\Theta P(\psi, T)\, P^{m-1}(\theta, \psi)\, d\lambda(\psi)$$

$$\theta \xrightarrow{m-1} \psi \xrightarrow{P} T$$

$$\begin{tikzcd}
\theta^0 \arrow[r, "P"] \arrow[rrrr, bend right] & \theta^1 \arrow[r, "P"] & \theta^2 \arrow[r, "P"] & \cdots \arrow[r, "P"] & \theta^m
\end{tikzcd}$$

$$P(\theta^{(m)} \in T) = \int_\Theta P^m(\theta, T)\, f_0(\theta)\, d\theta$$

$$\lim_{m\to\infty} P(\theta^m \in T) = \lim \int \boxed{} =$$

$$= \int_\Theta \underbrace{\lim P^m(\theta, T)}_{=\pi(T)} f_0(\theta)\, d\theta =$$

$= \pi(T)$, je-li π lim rozdel,

$$= \int_\Theta \pi(T)\, f_0(\theta)\, d\theta = \pi(T) \underbrace{\int_\Theta f_0(\theta)\, d\theta}_{1}$$

$$\pi(T) = \lim_{m\to\infty} P^m(\theta, T) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{\Theta} P(\psi, T)\, P^{m-1}(\theta, \psi)\, d\lambda(\psi) =$$

$$= \int_{\Theta} P(\psi, T) \underbrace{\lim_{m\to\infty} P^{m-1}(\theta, \psi)\, d\lambda(\psi)} =$$

$$= \int_{\Theta} P(\psi, T)\, \pi(\psi)\, d\lambda(\psi) = \pi P(T)$$

SHRNUTÍ 1:

- reversibilita k π $\Rightarrow$ stacionarita k π
- limitní rozdel. je π $\Rightarrow$ π je stacionární

SHRNUTÍ 2:

$\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \dots$ je markovský řetězec, pokud sdruž. rozdel. stavů vzniká aplikací počátečního rozdělení f_0 a dále už jenom přechod jádrem

$P(\Theta, T)$ = prst. přechodu z Θ do T.

$$P(\Theta, T) = \int_T \underbrace{p(\Theta, \psi)}_{=\text{ přechodová hustota}} d\lambda(\psi)$$

ZNAČ: je-li π rozdělení na $(\Theta, \mathcal{T})$

$$\pi P(T) = \int_\Theta P(\Theta, T)\, \pi(\Theta)\, d\lambda(\Theta)$$

reversibilita (vůči π) $\forall T, S \in \mathcal{T}$

$$\int_T P(\theta, S)\, \pi(\theta)\, d\lambda(\theta) = \int_S P(\psi, T)\, \pi(\psi)\, d\lambda(\psi)$$

Postač. podm. pro revers.

$\equiv$ detail. podm. rovnováhy

$p(\theta,\psi)\,\pi(\theta) = p(\psi,\theta)\,\pi(\psi)$ s.v. (θ,ψ)

stacionarita (vůči π)

$\equiv \forall T \in \mathcal{T} \quad \pi P(T) = \pi(T)$

detail podm. rov. $\Rightarrow$ reversibilita $\Rightarrow$ stacionarita

π je limitním rozdělením

$$\equiv \pi(T) = \lim_{m\to\infty} P^m(\theta, T)$$

Potom mj.

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Theta P^m(\theta, T)\, f_0(\theta)\, d\lambda(\theta) = \pi(T)$$

pro libovolné f_0

π limitní $\Rightarrow$ π stacionární

Existuje-li limitní rozdělení, potom musí být rovno stacionárnímu.

Cíl: Konstrukce M. řetězce, jehož stacionární rozdělení $= f$ (rozdělení, ze kterého chci generovat)

$M = \infty$

$$\theta^0 \xrightarrow{P} \theta^1 \xrightarrow{P} \theta^2 \xrightarrow{P} \theta^3 \longrightarrow \ \Big\| \ \ldots$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \equiv$$

$$f_0 \qquad\qquad f(\bar{x}) \quad \breve{f} \quad \breve{f} \quad \breve{f}$$