Odvození pro lineární model | 2018 | (lze kombinovat se slidy) 1.

APRIORNÍ: $p(\beta,\tau) = p(\beta)\cdot p(\tau)$

$$p(\beta) \propto 1 \quad , \quad p(\tau) \propto \frac{1}{\tau} \quad (\equiv p(\log\sigma) \propto 1)$$

(semikonjugovaný systém, princip neurčitosti)

$b = (X^TX)^{-1}X^TY, \qquad SSe = (Y-Xb)^T(Y-Xb)$

BYLO: $L(\beta,\tau) = p(y/\beta,\tau) = (2\pi)^{-n/2}|X^TX|^{1/2}$

$$\tau^{n/2} = \tau^{k/2} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\beta-b)^TX^TX(\beta-b)\right) \cdot \tau^{\frac{n-k+2}{2}-1} \exp\left(-\tau\frac{SSe}{2}\right)$$

přičtoto

$$\Rightarrow p(\beta,\tau/y) \propto p(y/\beta,\tau)\, p(\beta,\tau) =$$

$$\propto \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\tau\frac{SSe}{2}\right)\exp\left(-\frac{\tau}{2}(\beta-b)^TX^TX(\beta-b)\right)$$

z apriorního

- možná něco upravíme
- pokud ne, použijme nejprve: marginální aposteriorní rozdělení τ

$\boxed{\tau / y}$ (2.)

$$p(\tau/y) = \int_{\mathbb{R}^k} p(\beta, \tau / y)\, d\beta \propto$$

$$\propto \int \tau^{n/2-1} \exp\left(-\frac{\tau}{2} S_e\right) \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\beta-b) X^T X (\beta-b)\right) d\beta$$

$$= \tau^{n/2-1} \exp\left(-\frac{\tau}{2} S_e\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^k} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\beta-b) X^T X (\beta-b)\right) d\beta}_{\text{až na const hustota } N(b,\ \tau^{-1}(X^TX)^{-1})}$$

$$= \tau^{n/2-1} \exp\left(-\frac{\tau}{2} S_e\right) |\tau^{-1}(X^TX)^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{*}$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^k} (2\pi)^{*} |\tau^{-1}(X^TX)^{-1}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\beta-b) X^T X (\beta-b)\right) d\beta}_{=1}$$

$$= (2\pi)^{-*}\, \tau^{n/2-1} \exp\left(-\frac{\tau}{2} S_e\right) \tau^{-\frac{k}{2}} |X^TX|^{-1/2}$$

$$\propto \tau^{\frac{n-k}{2}-1} \exp\left(-\frac{\tau}{2} S_e\right)$$

tj. $\tau / Y \sim Ga\left(\frac{n-k}{2}, \frac{S_e}{2}\right)$

existence normující konstanty ?

$\iff n-k > 0, \quad S_e > 0$

$n > k$

NYNÍ: $E(\tau / Y) = \frac{n-k}{S_e}$

$E(\sigma^2 / Y) = \frac{S_e}{n-k-2}$ atd.

$\boxed{\beta, \tau / y}$

$$p(\beta, \tau / y) \overset{\text{VŽDY}}{=} p(\beta / \tau, y)\, p(\tau / y)$$

VÍME: $p(\beta, \tau / y) \propto \tau^{n/2 - 1} \exp\left(-\tau \frac{s_e}{2}\right)$

$$\exp\left(-\frac{\tau}{2} (\beta - b)^T X^T X (\beta - b)\right)$$

TÉŽ VÍME: $p(\tau / y) \propto \tau^{\frac{n-k}{2} - 1} \exp\left(-\tau \frac{s_e}{2}\right)$

NYNÍ: $p(\beta, \tau / y) \propto \underbrace{\tau^{\frac{n-k}{2} - 1} \exp\left(-\tau \frac{s_e}{2}\right)}_{p(\tau / y)} \cdot$

$$\cdot \underbrace{\tau^{\frac{k}{2}} \exp\left(-\frac{\tau}{2} (\beta - b)^T X^T X (\beta - b)\right)}_{\text{musí být } p(\beta / \tau, y)}$$

POZNÁVÁME: $\beta / \tau, y \propto N\left(b, \tau^{-1} (X^T X)^{-1}\right)$

Pokud bychom dopředu nespočítali τ / y, museli bychom $\tau^{n/2 - 1}$ v $p(\beta, \tau / y)$ správně rozdělit mezi $p(\beta / \tau, y)$ a $p(\tau / y)$!

INFERENCE O β: $p(\beta, \tau / y)$ je stále k ničemu.

kdy existuje normující konstanta pro $\beta|\tau, Y$?

$\iff (X^T X)$ invertovatelná

$\iff \operatorname{rank}(X) = k$

(nyní máme pořešenou existenci normující konst. pro $p(\beta, \tau | y)$)

5.

VSUVKA (VÍCEROZMĚRNÉ t-ROZDĚLENÍ)

$U \sim N_k(0, \Sigma)$, $\Sigma > 0$

$V \sim \chi^2_\nu$, $U \perp\!\!\!\perp V$

$$T = U \cdot \sqrt{\frac{\nu}{V}} \sim mvt_{k,\nu}(\Sigma)$$

Jen na doma: → vícerozměrné t-rozdělení s ν stupni volnosti a měřítkovou maticí Σ

Hustota: $$f(t) \propto |\Sigma|^{-1/2} \left\{1 + \frac{t^T \Sigma^{-1} t}{\nu}\right\}^{-\frac{\nu+k}{2}} , t \in \mathbb{R}^k$$

Momenty: $ET = 0$, $\nu > 1$

$\operatorname{var} T = \frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$, $\nu > 2$

---

c) marginální aposteriorní rozdělení β
$p(\beta|y)$

$$p(\beta|y) = \int_0^\infty p(\beta,\tau|y)\,d\tau \propto$$

$$\propto \int_0^\infty \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\tau}{2} S_e\right) \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\beta-b)^T X^T X(\beta-b)\right) d\tau$$

$$= \int_0^\infty \tau^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\tau \underbrace{\left(\frac{S_e}{2} + \frac{1}{2}(\beta-b)^T X^T X(\beta-b)\right)}_{a}\right\} d\tau$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\tau^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\tau \cdot a)}_{\text{až na konst. hustota } Ga\left(\frac{n}{2}, a\right)} d\tau =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{a^{n/2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{a^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-a\tau} \tau^{\frac{n}{2}-1} d\tau}_{=1} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{a^{n/2}} \propto a^{-\frac{n}{2}}$$

To jest,

$$p(\beta/y) \propto \left(\frac{SSe + (\beta-b)^T X^T X (\beta-b)}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} =$$

← začínáme tvořit hustotu t-rozdělení

$$= \Big\{\underbrace{\tfrac{1}{2}SSe}_{\text{nezáv. } \beta} \frac{1 + (\beta-b)^T (SSe^{-1} X^T X)(\beta-b)}{\cancel{4}}\Big\}^{-\frac{n}{2}} \propto$$

$$\propto \Big\{ \frac{1 + (\beta-b)^T (SSe^{-1} X^T X)(\beta-b)}{\cancel{4}} \Big\}^{-\frac{n}{2}} =$$

$$= \Big\{ \frac{1 + (\beta-b)^T (SSe^{-1} X^T X)(\beta-b)}{\cancel{4}} \Big\}^{-\frac{\overset{\nu}{(n-k)}+k}{2}}$$

$$= \Big\{ 1 + \frac{(\beta-b)^T \overbrace{\boxed{\left(\frac{SSe}{n-k}\right)^{-1} X^T X}}^{\Sigma^{-1}} (\beta-b)}{\underset{\nu}{n-k}} \Big\}^{-\frac{\overset{\nu}{n-k}+k}{2}}$$

Tedy $\boxed{\beta / Y \sim b + mvt_{k,n-k}\left(\frac{SSe}{n-k}(X^T X)^{-1}\right)}$

resp. $(\beta - b)/Y \sim mvt_{k,n-k}\left(\frac{SSe}{n-k}(X^T X)^{-1}\right)$

Označ. $(X^T X)^{-1} = V = (v_{jl})_{j,l=1,\dots,k}$

VLASTNOSTI t-rozdělení

$\forall j = 1, \dots, k$

$$\frac{\beta_j - b_j}{\sqrt{\frac{SSe}{n-k} v_{jj}}} \Big| Y \sim t_{n-k}$$

a dále

$$\frac{1}{k} (\beta - b)^T \left(\frac{n-k}{SSe} X^T X \right) (\beta - b) \Big| Y \sim F_{k, n-k}$$

→ k čemu to je dobré vědět?

→ věrohodnostní množiny a intervaly (zde většinou stejné jako ~~při~~ konfid. množ. v klasické statistice)

+ diskuze nad věrohodnostními množinami atd.

PRO DLOUHÉ ZIMNÍ VEČERY:

Odvoď taktéž pokud:

$p(\beta, \tau) = p(\beta | \tau) \, p(\tau)$ $\quad \beta | \tau \sim N(\beta_0, \tau^{-1} \Sigma_0)$

$\tau \sim \cancel{G(g_0, h_0)} \; Ga(c_0, d_0)$

NEBO:

$p(\beta, \tau) = p(\beta) \, p(\tau)$, $\quad \beta \sim N(\beta_0, \Sigma_0)$

$\tau \sim \cancel{G(g_0, h_0)} \; Ga(c_0, d_0)$

NJDE:

$$\tau | Y \sim Ga\left(c_0 \cancel{g_0} + \frac{n-k}{2},\ d_0 \cancel{h_0} + \frac{\nu s_e}{2}\right)$$

pro $p(\beta, \tau) = p(\beta) p(\tau)$ $\quad \beta \sim N(\beta_0, \Sigma_0)$

$$\tau \sim Ga(c_0 \cancel{g_0},\ d_0 \cancel{h_0})$$

$\cancel{\beta}$ $\cancel{\beta | Y} \sim \cancel{Nf}$

$$\beta | \tau, Y \sim N\Bigg((\tau (X^T X) + \Sigma_0^{-1})^{-1} \overbrace{(\tau X^T X b + \Sigma_0^{-1} \beta_0)}^{\text{kanonická stř. hodnota}}\ N \ldots,$$

$$(\tau (X^T X) + \Sigma_0^{-1})^{-1} \Bigg)$$

$$\beta | Y \sim mvt(\ldots)$$