5. Markov chain Monte Carlo

5.1 Úvod

→ slidy (1-5 ~~145-150~~)

5.2 Markovské procesy s obecnou množinou stavů

Def 5.1 Markovské jádro 7 ~~152~~

$P: \Theta \times \mathcal{T} \to [0,1]$

$\forall T \in \mathcal{T}$ $P(\bullet, T)$ nezáp. měřit. fce na Θ

$\forall \theta \in \Theta$ $P(\theta, \bullet)$ prstní míra na $\mathcal{T}$

8 ~~153~~

→ přechodová hustota (vzhledem k σ-kon. míře λ)

$\forall \theta$ $$P(\theta, T) = \int_T p(\theta, \psi)\, d\lambda(\psi)$$

Def 5.2 Homogenní markovský řetězec 9 ~~154~~

$$P(\theta^0 \in T_0, \dots, \theta^m \in T_m) = \int_{T_0} \cdots \int_{T_{m-1}} \underbrace{\int_{T_m} p(\theta^{m-1}, \theta^m)}_{P(\theta^{m-1}, T_m)} p(\theta^{m-2}, \theta^{m-1}) \cdots p(\theta^0, \theta^1)\, f_0(\theta^0)\, d\lambda(\theta^0) \dots d\lambda(\theta^m)$$

10 ~~155~~

Věta 5.1 $$E(h(\theta^{m+1}) / \theta^m, \dots, \theta^0) = E(h(\theta^{m+1}) / \theta^m)$$

π = hustota vzhledem k λ na $(\Theta, \mathcal{T})$ 11 ~~156~~

$$\pi P(T) = \int_{\Theta} P(\theta, T)\, \pi(\theta)\, d\lambda(\theta) =$$

$$= \int_{\Theta} \left(\int_T p(\theta, y)\, d\lambda(y) \right) \pi(\theta)\, d\lambda(\theta) =$$

12 ~~157~~

$$= \int_T \underbrace{\int_{\Theta} p(\theta, y)\, \pi(\theta)\, d\lambda(\theta)}_{\text{hustota rozdělení } \pi P}\, d\lambda(y)$$

Def 5.3 Stacionární rozdělení 13 ~~158~~

$$\forall T \in \mathcal{T} \quad \pi P(T) = \pi(T)$$

$$\int_{\Theta} P(\theta, T)\, \pi(\theta)\, d\lambda(\theta) = \int_T \pi(\theta)\, d\lambda(\theta)$$

$$\int_T \int_{\Theta} p(\theta, y)\, \pi(\theta)\, d\lambda(\theta)\, d\lambda(y) = \int_T \pi(\theta)\, d\lambda(\theta)$$

Def 5.4 Reversibilita 14 ~~159~~

$$\forall T, S \in \mathcal{T}$$

$$\int_T P(\theta, S)\, \pi(\theta)\, d\lambda(\theta) = \int_S P(y, T)\, \pi(y)\, d\lambda(y)$$

$$\underbrace{\int_T \int_S p(\theta, y)\, d\lambda(y)\, \pi(\theta)\, d\lambda(\theta)} = \underbrace{\int_S \int_T p(y, \theta)\, d\lambda(\theta)\, \pi(y)\, d\lambda(y)}$$

~~160~~ 15

~~161~~ 16 míra $Q_1(T, S)$ na $(\Theta \times \Theta, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$

sdružená hustota

$q_1(\theta, y) = p(\theta, y)\, \pi(\theta)$

míra $Q_2(S, T)$

sdruž. hustota

$q_2(y, \theta) = p(y, \theta)\, \pi(y)$

Reversibilita $\equiv$ $\forall T, S \in \mathcal{T}$ 17 ~~162~~

$$Q_1(T,S) = Q_2(S,T)$$

3

---

18 ~~163~~

$\to$ detailní podmínka rovnováhy

$$p(\theta,\psi)\,\pi(\theta) = p(\psi,\theta)\,\pi(\psi) \quad \text{pro s.v. } \theta,\psi \in \Theta$$

postačující pro reversibilitu

---

19 ~~164~~

Věta 5.2

reversibilní vzhledem k π $\Rightarrow$ π je stacionární

Důkaz: Reversibilita

$\forall T, S$
$$\int_T P(\theta,S)\,\pi(\theta)\,d\lambda(\theta) = \int_S P(\psi,T)\,\pi(\psi)\,d\lambda(\psi)$$

$S = \Theta$:
$$\int_T \underbrace{P(\theta,\Theta)}_{1}\,\pi(\theta)\,d\lambda(\theta) = \int_\Theta P(\psi,T)\,\pi(\psi)\,d\lambda(\psi)$$

$$\pi(T) = \pi P(T)$$

Def 5.5 Přechodové jádro m-tého řádu 20 ~~165~~

$$P^m(\theta,T) = \int_\Theta P(\psi,T)\,P^{m-1}(\theta,\psi)\,d\lambda(\psi)$$

---

21 ~~166~~

Věta 5.3 Chapman-Kolmogorov

$$P^m(\theta,T) = \int_\Theta P^{m-n}(\psi,T)\,P^n(\theta,\psi)\,d\lambda(\psi)$$

Důkaz: pouze připomení definici homog. m. ř.

$$P(\theta^0 \in T_0, \theta^1 \in \Theta, \dots, \underset{T_n}{\theta^n \in \Theta}, \dots, \underset{T_m}{\theta^m \in T}) = \int_{T_0} \cdots \int_{T_n} \cdots \int_T p(\theta^{m-1},\theta^m)\,p(\theta^{m-2},\theta^{m-1}) \cdot$$

$$\cdots p(\theta^{n-1},\theta^n) \cdots p(\theta^0,\theta^1)\,f_0(\theta^0)\,d\lambda(\theta^0) \cdots d\lambda(\theta^m)$$

Def 5.6 Limitní rozdělení pro s.v. Θ $\forall T$

$$\lim_{m\to\infty} P^m(\theta, T) = \pi(T) = \int_T \pi(\theta)\, d\lambda(\theta)$$

#

~~$\lim_{n\to\infty}$~~ Pozn (viz též slide):

$\forall f_0$ počáteční rozdělení (je-li π limitním)

$$P(\theta^m \in T) = \int_\Theta P^m(\theta, T) f_0(\theta)\, d\lambda(\theta)$$

$$\xrightarrow{m\to\infty} \int_\Theta \pi(T) f_0(\theta)\, d\lambda(\theta) = \pi(T) \underbrace{\int_\Theta f_0(\theta)\, d\lambda(\theta)}_{1}$$

Věta 5.4 π limitní $\Rightarrow$ π stacionární

Dk: viz slide:

$$\pi(T) \overset{\pi \text{ limitní}}{=} \lim_{m\to\infty} P^m(\theta, T) = \lim_{m\to\infty} \int_\Theta P(\psi, T) P^{m-1}(\theta, \psi)\, d\lambda(\psi)$$

$$= \int_\Theta P(\psi, T)\, \pi(\psi)\, d\lambda(\psi) = \pi P(T)$$

SHRNUTÍ:

Reversibilita vzhledem k π $\Rightarrow$ stacionarita vzhledem k π.

Limitní rozdělení $= \pi$ $\Rightarrow$ π je stacionární.

SHRNUTÍ

$\theta^1, \theta^2, \ldots$ M. řetězec

daáno přechod jádrem $P(\theta, T)$ = „pst. přechodu z θ do T"

- $P(\theta, T) = \int_T \underbrace{p(\theta,\psi)}_{\text{přechod. hustota}} d\lambda(\psi)$

- π rozdělení na $(\Theta, \mathcal{T})$
  $$\pi P(T) = \int_\Theta P(\theta, T)\,\pi(\theta)\,d\lambda(\theta)$$

- reverzibilita (vůči π) $\quad \forall T, S \in \mathcal{T} \quad \int_T P(\theta, S)\,\pi(\theta)\,d\lambda(\theta) = \int_S P(\psi, T)\,\pi(\psi)\,d\lambda(\psi)$

  detail. podm. rovnováhy
  $$p(\theta,\psi)\,\pi(\theta) = p(\psi,\theta)\,\pi(\psi) \quad \text{s.v.}$$
  ($\Leftrightarrow$ reverzibilita)

- stacionarita (vůči π) $\quad \pi P(T) = \pi(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}$

  reverzibilita $\Rightarrow$ stacionarita

- π je limitním rozdělením $\equiv$ $\pi(T) = \lim\limits_{m\to\infty} P^m(\theta, T)$

  Potom m.j. $\quad \lim\limits_{m\to\infty} \int_\Theta P^m(\theta, T)\,f_0(\theta)\,d\lambda(\theta) = \pi(T)$ pro libovolné f_0

- π limitní $\Rightarrow$ π je stacionární

5.3 Principy MCMC

24 ~~169~~

---

25 ~~170~~

$\theta^1, \dots, \theta^M$ iid $f(\theta)$

$$\int t(\theta) f(\theta)\, d\nu(\theta) = E_f\, t(\theta) \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} t(\theta^m)$$

$\xleftarrow[M\to\infty]{s.j.}$ (za jistých předp.)

---

26 ~~171~~

$\theta^0, \dots, \theta^M$ homogenní Mark. řetězec

stacionární rozdělení $f(\theta)$

VÍME: ~~reverzi~~ detailní podmínka rovnováhy

$\Rightarrow$ reversibilita $\Rightarrow$ stacionarita

$p(\theta, \psi) f(\theta) = p(\psi, \theta) f(\psi)$ pro s.v. θ, ψ

---

27 ~~172~~

existuje-li limitní ($=$ stacionární)

$\theta^{B+1}, \dots \theta^{B+M} \sim f(\theta)$ (ne nezávislé)

pro B velké

---

28 ~~173~~

Ergodická věta

za jistých předp.

$$\underbrace{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} t(\theta^{B+m})}_{=:\hat{t}_M} \xrightarrow[M\to\infty]{s.j.} E_f\, t(\theta)$$

$\rightarrow$ ~~174–177~~ 29–32 : slidy