5.4 Gibbsův algoritmus

33-35
~~178-180~~

Cílové rozdělení $f(\theta)$: hustota vzhledem
k $\lambda = \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_k$ na $(\Theta_1 \times \dots \times \Theta_k, \dots)$

~~181~~ Algoritmus:
36

$$\theta_1^{(m+1)} \sim f(\theta_1 / \theta_2^m, \dots, \theta_k^m)$$

$$\theta_2^{m+1} \sim f(\theta_2 / \theta_1^{m+1}, \theta_3^m, \dots, \theta_k^m)$$

$$\theta_3^{m+1} \sim f(\theta_3 / \theta_1^{m+1}, \theta_2^{m+1}, \theta_4^m, \dots, \theta_k^m)$$

$$\vdots$$

$$\theta_k^{m+1} \sim f(\theta_k / \theta_1^{m+1}, \theta_2^{m+1}, \dots, \theta_{k-1}^{m+1})$$

→ přechodová hustota:

$$p(\theta, \psi) = f(\psi_1 / \theta_2, \dots, \theta_k) \cdot f(\psi_2 / \psi_1, \theta_3, \dots, \theta_k) \cdot f(\psi_3 / \psi_1, \psi_2, \theta_4, \dots, \theta_k) \cdots f(\psi_k / \psi_1, \dots, \psi_{k-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{k} f(\psi_i / \psi_1, \dots, \psi_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_k)$$

~~182~~ 37

Zpět: přechodové jádro

$$P(\theta, T) = \int_T p(\theta, \psi) \, d\lambda(\psi)$$

Věta 5.5

f je stacionární rozdělení markovského řetězce vygenerovaného pomocí Gibbsova algoritmu

? $\forall T \in \mathcal{J} \quad \int_T f(\psi)\, d\lambda(\psi) = \int_T \int_\Theta p(\theta,\psi) f(\theta)\, d\lambda(\psi)\, d\lambda(\theta)$

Důkaz pro $k=2$

$\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ $\quad p(\theta,\psi) = f(\psi_1|\theta_2) \cdot f(\psi_2|\psi_1)$

$$P(T) = \int_{\Theta_2}\int_{\Theta_1}\left(\int_T f(\psi_1|\theta_2) f(\psi_2|\psi_1)\, d\lambda(\psi)\right) f(\theta_1,\theta_2)\, d\lambda_1(\theta_1)\, d\lambda_2(\theta_2)$$

FUBINI

$$= \int_T \int_{\Theta_2}\int_{\Theta_1} f(\theta_1,\theta_2)\, d\lambda_1(\theta_1)\, f(\psi_1|\theta_2)\, d\lambda_2(\theta_2)\, f(\psi_2|\psi_1)\, d\lambda(\psi)$$

$f_2(\theta_2)$

$f(\psi_1,\theta_2)$

$$= \int_T \int_{\Theta_2} f(\psi_1,\theta_2)\, d\lambda_2(\theta_2)\, f(\psi_2|\psi_1)\, d\lambda(\psi) =$$

$f_1(\psi_1)$

$f(\psi_1,\psi_2)$

$$= \int_T f(\psi)\, d\lambda(\psi) = f(T)$$

ergodicita (slide)

185 40 ZOPAK: ~~[illegible]~~ detailní podmínka rovnováhy

= $p(\theta, \psi) f(\theta) = p(\psi, \theta) f(\psi)$ pro s.-sv. θ, ψ

RANDOM SCAN: (~~[illegible]~~

~~$p(\theta, \psi)$~~ $= p_1$ ~~$f(\psi_1 | \theta_2, \dots, \theta_k) + p_2 f(\psi_2 | \theta_1, \theta_3, \dots, \theta_k)$~~

~~$+ \dots + p_k f(\psi_k | \theta_1, \dots, \theta_{k-1})$~~ ~~[illegible]~~

resp.

~~$p(\theta, \psi) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot f(\psi_j | \theta_{(-j)}) \right)$~~

41

~~186~~+

42

~~187~~ **hierarchický model**

úrovně h. modelu

$f(\theta) = f(\theta_1 | \theta_2) f(\theta_2 | \theta_3) \cdots f(\theta_k)$

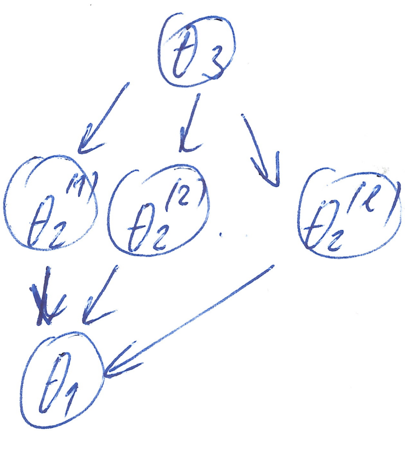
~~$f(\theta_j | \theta_{-j}) \propto f(\theta) \propto$~~

řekněme, že $\theta_2 = \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_2^{(k)}$ potomek sourozenci (závisí na rodiči)

$f(\theta_2^{(j)} | \dots) \propto f(\theta) \propto f(\theta_1 | \theta_2) \cdot f(\theta_2 | \theta_3)$

VŽDY

cokoliv, co nemá $\theta_2^{(j)}$ je konst.



~~[illegible]~~

~~188 - 191~~ 43-46 Lineární model 14

$$p(\theta|y) \propto \tau^{n/2-1} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(SSe + (\beta-b)^T X^T X(\beta-b)\right], \quad p(\tau) \propto \frac{1}{\tau}$$

$$p(\tau|\dots) \propto \quad -''- \quad -''-$$

$$p(\beta|\dots) \propto \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\beta-b)^T X^T X(\beta-b)\right) \sim N(\dots)$$

$$p(\beta_i|\dots) \propto \exp\left(-\frac{\tau}{2}(\beta-b)^T X^T X(\beta-b)\right) \sim \text{N}(\dots)$$

odrad vzít pouze členy obsahující β_i, zbytek jsou konst.

47 - 56
~~192 - 201~~

Obrázky atd.

5.5 Metropolisův – Hastingsův algoritmus

~~202 – 204~~ 57-59

205
60 Algoritmus:

$y \sim q(\theta^{(m)}, y)$ návrh

- $y = \theta^{m+1}$ s prstí $\min\left(\frac{f(y)\,q(y,\theta^m)}{f(\theta^m)\,q(\theta^m,y)}, 1\right)$

$= \theta^m$ s prstí $1 -$ [vm]

VYSVĚTLIT PRST. PŘIJETÍ

206
61 AMBICIÓZNÍ vs. OPATRNÉ

↳ počkej, až bude random walk

207
62 Metropolis – ~~com~~ komentuj

208
63 Independent sampler

– účel?

209
64 Náhodná procházka

– zelé ambiciózní / opatrné

210
65 Stacionarita (věta)

→66