

## PÍSEMNÁ ČÁST ZKOUŠKY: 11. PROSINCE 2024

## Rady a pokyny

- Definujte **veškeré značení, které používáte** (pokud není definováno v zadání).
- Nezapomínejte, že většina metod a výsledků předpokládá cosi o zúčastněných náhodných veličinách.
- Máte-li stanovit *podmínky* nebo předpoklady pro nějaké tvrzení, udělejte je *co nejméně omezující*.
- Snažte-li se dokázat určité tvrzení, *můžete používat jiná tvrzení, aniž byste je museli dokazovat*. Použitá tvrzení uveďte i s jejich předpoklady a tyto předpoklady ověřte. Nemusíte formulovat následující tvrzení: *zákon velkých čísel, centrální limitní věta, Cramérova-Sluckého věta, věta o spojitě transformaci a  $\Delta$ -metoda*.

1. Definujte multinomické rozdělení a určete jeho střední hodnotu. [3]
2. Nechť  $\bar{X}_n$  je výběrový průměr náhodného výběru  $X_1, \dots, X_n$  z Poissonova rozdělení  $Po(\lambda_X)$ . Určete  $c$  takové, že  $\bar{X}_n^{1/2}$  konverguje v pravděpodobnosti k  $c$ . Určete asymptotické rozdělení  $\sqrt{n}(\bar{X}_n^{1/2} - c)$  a použijte je k odvození intervalového odhadu pro  $\lambda_X$ .  
*Můžete využít toho, že  $E X_i = \lambda_X$  a  $\text{var } X_i = \lambda_X$ .* [7]
3. Zkonstruuje **jednostranný** interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálně rozdělených dat. [4]
4. Shrňte předpoklady testu o střední hodnotě ve výběru z *normálního* rozdělení s rozptylem  $15^2$  (rozdělení IQ v populaci). Uvažujte **jednostrannou** nulovou hypotézu a odpovídající alternativu. Definujte testovou statistiku, kritický obor a uveďte vzorec pro výpočet p-hodnoty. Je tento test přesný nebo asymptotický?

Definujte hladinu testu a podrobně vysvětlete (**včetně odvození potřebného rozdělení testové statistiky**), že tento test dodržuje (přesně nebo asymptoticky) předepsanou hladinu. [8]

5. Předvolebního průzkumu před 2. kolem prezidentské volby se v obcích Dolní a Horní Pěna zúčastnilo 166, resp. 236 respondentů, z nichž 63, resp. 139 (v Dolní, resp. Horní Pěně) vyjádřilo podporu Andreji Babišovi. Zbýlých 103, resp. 97 respondentů vyjádřilo podporu Petru Pavlovi. Odvoďte (**včetně důkazu potřebné konvergence v distribuci**) asymptotický oboustranný interval spolehlivosti pro rozdíl preferencí Andreje Babiše mezi obcemi Horní a Dolní Pěna. Zaveďte potřebné značení. Výsledný vzorec není třeba numericky dopočítat s konkrétními daty z Dolní a Horní Pěny. [8]