UČEBNÍ TEXT
ALGEBRA 2 PRO INFORMATIKY

DAVID STANOVSKÝ
DROBNÉ ZMĚNY: ZUZANA PATÁKOVÁ

stanovsk@karlin.mff.cuni.cz

Date: 10. února 2023.

Obsah

Homomorfismy

1. Grupové homomorfismy

Slovem *homomorfismus* se v matematice označují zobrazení, která zachovávají základní strukturu matematických objektů. Například v lineární algebře to jsou zobrazení zachovávající sčítání a skalární násobení. V teorii grafů to jsou zobrazení zachovávající hrany. Podobně, v teorii grup to budou zobrazení zachovávající základní grupové operace.

Jak si ukážeme, homomorfismy přenášejí řadu dalších vlastností, např. v obou grupách panuje úzký vztah mezi podgrupami či řády prvků.

1.1. Základní vlastnosti.

V celé sekci budeme uvažovat dvě grupy $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ a $\mathbf{H} = (H, *, ', e)$.

Definice. Buď $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ grupy. Zobrazení $\varphi : G \to H$ je *homomorfismem* těchto grup, pokud pro každé $a, b \in G$ platí

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b), \qquad \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)', \qquad \varphi(1) = e.$$

Fakt, že je zobrazení mezi grupami homomorfismem, budeme zapisovat $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$.

Hned na začátku je dobré si všimnout, že druhá a třetí rovnost plynou z té první, což znatelně zjednodušuje ověřování, zda je dané zobrazení homomorfismem.

Lemma 1.1. *Buď $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ grupy a $\varphi : G \to H$ zobrazení. Pak φ je homomorfismem těchto grup právě tehdy, když $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ pro všechna $a, b \in G$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $\varphi(1) = e$. Protože $e * \varphi(1) = \varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) * \varphi(1)$, krácením dostaneme $\varphi(1) = e$. Dále dokážeme $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)'$ pro každé $a \in G$. Protože $e = \varphi(1) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(a^{-1})$, z jednoznačnosti inverzních prvků v grupě $\mathbf{H}$ plyne $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)'$. □

Buď $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ homomorfismus. Jeho *obrazem* nazýváme jeho obor hodnot, tj. množinu

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) : \ a \in G\}.$$

Jeho *jádro* definujeme jako množinu

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \ \varphi(a) = e\}.$$

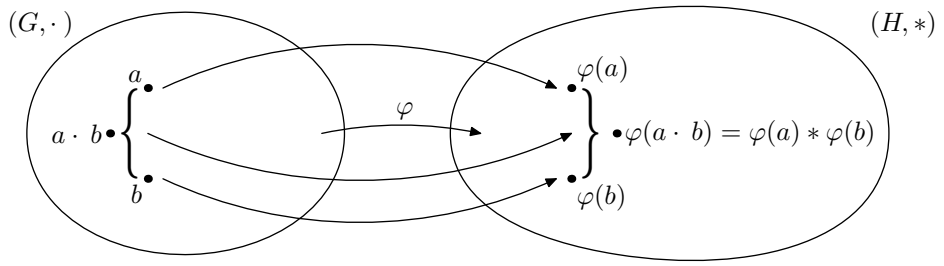
Tvrzení 1.2 (jádro a obraz jsou podgrupy)**.** *Buď $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ grupy a $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ homomorfismus. Pak*

(1) $\mathrm{Im}(\varphi)$ *tvoří podgrupu grupy* $\mathbf{H}$*;*
(2) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *tvoří podrupu grupy* $\mathbf{G}$*.*

Důkaz. (1) $e \in \mathrm{Im}(\varphi)$, protože $e = \varphi(1)$. Pokud $\varphi(a), \varphi(b) \in \mathrm{Im}(\varphi)$, pak $\varphi(a)' = \varphi(a^{-1}) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ a $\varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(a \cdot b) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

(2) $1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, protože $\varphi(1) = e$. Pokud $a, b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, pak a^{-1} a $a \cdot b$ také, protože $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)' = e' = e$ a $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b) = e * e = e$. □

Tvrzení 1.3. *Buď $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ grupy a $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ homomorfismus. Pak φ je prostý právě tehdy, když* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1\}$.



Obrázek 1. Homomorfismus $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$.

Důkaz. Je-li φ prosté, dva různé prvky se nemohou zobrazovat na e, takže $\mathrm{Ker}(\varphi)$ musí obsahovat jen jeden prvek, a tím je 1. Naopak, $\varphi(a) = \varphi(b)$ právě tehdy, když $e = \varphi(a) * \varphi(b)' = \varphi(a \cdot b^{-1})$, takže neprostá zobrazení obsahují nejednotkový prvek v jádru. □

Příklad. Řada známých zobrazení v matematice je homomorfismem jistých grup.

- Uvažujme zobrazení $z \mapsto |z|$ na komplexních číslech. Toto zobrazení je homomorfismem grup $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, protože $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Jeho jádrem je podgrupa komplexních jednotek, jeho obrazem podgrupa kladných čísel. Naopak, toto zobrazení není homomorfismem grup $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, protože obecně $|a + b| \neq |a| + |b|$.
- Uvažujme zobrazení $z \mapsto e^z$ na komplexních číslech. Toto zobrazení je homomorfismem grup $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, protože $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$. Jeho jádrem je podgrupa $\langle 2\pi i \rangle = \{k \cdot 2\pi i : \ k \in \mathbb{Z}\}$, jeho obrazem celé $\mathbb{C}^*$.
- Uvažujme zobrazení $A \mapsto \det(A)$ na maticích. Toto zobrazení je homomorfismem grup $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T}) \to \mathbf{T}^*$, protože $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Jeho jádrem je podgrupa $\mathbf{SL}_n(\mathbf{T})$, jeho obrazem celé $\mathbf{T}^*$.
- Uvažujme zobrazení $\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$ na permutacích. Toto zobrazení je homomorfismem grup $\mathbf{S}_n \to \mathbb{Z}^*$, protože $\mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma)$. Jeho jádrem je podgrupa $\mathbf{A}_n$, jeho obrazem celé $\mathbb{Z}^*$.

Příklad. Je-li $\mathbf{G}$ grupa a $a \in G$ řádu n, pak diskrétní exponenciála $\mathbb{Z}_n \to \mathbf{G}$, $k \mapsto a^k$, je prostý homomorfismus. Obrazem je podgrupa $\langle a \rangle_{\mathbf{G}}$.

Příklad. Působení grupy $\mathbf{G}$ na množině X není nic jiného než homomorfismus $\mathbf{G} \to \mathbf{S}_X$, srovnejte obě definice!

Homomorfismy jsou určeny svými hodnotami na generátorech: uvažujme homomorfismus $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$, nechť $\mathbf{G} = \langle X \rangle$ a označme hodnoty $\varphi(a) = h_a$ pro všechna $a \in X$. Obecný prvek grupy $\mathbf{G}$ lze napsat ve tvaru $g = a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}$, kde $a_1, \ldots, a_n \in X$ a $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Hodnota zobrazení pak bude

$$\varphi(g) = \varphi(a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \varphi(a_n)^{k_n} = h_{a_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot h_{a_n}^{k_n}.$$

Avšak pozor, na rozdíl od vektorových prostorů není možné volit obrazy generátorů libovolně, jak ukazuje například následující tvrzení.

Tvrzení 1.4 (řád prvku a jeho obrazu)**.** *Buď $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ homomorfismus grup. Pak, pro každé $a \in G$,*

$$\mathrm{ord}(\varphi(a)) \mid \mathrm{ord}(a).$$

Je-li navíc φ prostý, pak

$$\mathrm{ord}(\varphi(a)) = \mathrm{ord}(a).$$

Důkaz. Označme $\mathrm{ord}(a) = n$. Pak $\varphi(a)^n = \varphi(a^n) = \varphi(1) = e$, čili nutně $\varphi(a)^k = e$ pro nějaké $k \mid n$. Je-li navíc φ prostý, pro všechna $k < n$ musí platit $\varphi(a)^k = \varphi(a^k) \neq e$, protože $a^k \neq 1$ □

Úloha. Popište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbf{S}_3$.

Řešení. Grupa $\mathbb{Z}_{10}$ je cyklická, $\mathbb{Z}_{10} = \langle 1 \rangle$, čili stačí určit přípustné hodnoty $\varphi(1)$: potom $\varphi(k) = \varphi(1+\ldots+1) = \varphi(1)\circ\ldots\circ(1) = \varphi(1)^k$. Řád prvku 1 v $\mathbb{Z}_{10}$ je 10, čili řád prvku $\varphi(1)$ v $\mathbf{S}_3$ musí číslo 10 dělit. Avšak v $\mathbf{S}_3$ jsou pouze prvky řádu 1, 2, 3, čili máme nejvýše čtyři možnosti: $\varphi(1) \in \{id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$. Je snadné ověřit, že všechna čtyři zobrazení $k \mapsto id$ a $k \mapsto (i\ j)^k$ jsou homomorfismy $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbf{S}_3$. (Rozmyslete si, proč zobrazení $k \mapsto (1\ 2\ 3)^k$ nesplňuje definici homomorfismu, bez odkazu na Tvrzení 1.4.) □

Tvrzení 1.5. *Buď $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{K}$ grupy a $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$, $\psi : \mathbf{H} \to \mathbf{K}$ homomorfismy. Pak*

(1) *$\psi \circ \varphi$ je homomorfismus $\mathbf{G} \to \mathbf{K}$,*
(2) *je-li φ bijektivní, pak φ^{-1} je homomorfismus $\mathbf{H} \to \mathbf{G}$.*

Důkaz. (1) Označme $\mathbf{K} = (K, +, -, 0)$. Pro $a, b \in G$ platí

$$(\psi\circ\varphi)(a\cdot b) = \psi(\varphi(a\cdot b)) = \psi(\varphi(a)*\varphi(b)) = \psi(\varphi(a))+\psi(\varphi(b)) = (\psi\circ\varphi)(a)+(\psi\circ\varphi)(b)$$

postupným použitím faktu, že φ a ψ jsou homomorfismy.

(2) Napišme $u, v \in H$ jako $u = \varphi(a)$ a $v = \varphi(b)$ pro jistá $a, b \in G$. Pak

$$\varphi^{-1}(u * v) = \varphi^{-1}(\varphi(a) * \varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(a \cdot b)) = a \cdot b = \varphi^{-1}(u) \cdot \varphi^{-1}(v)$$

použitím faktu, že φ je homomorfismus a $\varphi^{-1} \circ \varphi = id$. □

1.2. **Izomorfismus.**

Definice. Bijektivní homomorfismy nazýváme *izomorfismy.*

Z Tvrzení 1.5 ihned plyne, že složení izomorfismů je izomorfismus a inverzní zobrazení k izomorfismu je také izomorfismus.

Na izomorfismus je možné pohlížet jako na „kopírování algebraické struktury“: máme-li grupu $\mathbf{G}$ a bijektivní zobrazení $\varphi : G \to H$, můžeme na množinu H „překopírovat“ grupové operace předpisem

$$e = \varphi(1), \qquad a' = \varphi((\varphi^{-1}(a))^{-1}), \qquad a * b = \varphi(\varphi^{-1}(a) \cdot \varphi^{-1}(b)).$$

Vidíme, že zobrazení φ^{-1} bude izomorfismem mezi novou grupou $\mathbf{H} = (H, *', e)$ a starou grupou $\mathbf{G}$. Jedna grupa je kopií druhé, došlo pouze k „přejmenování prvků“ kopírovacím zobrazením φ. Na každý izomorfismus lze pohlížet tímto způsobem.

Dvě grupy $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ nazveme *izomorfní*, pokud existuje izomorfismus $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$, tento fakt značíme $\mathbf{G} \simeq \mathbf{H}$. Neformálně, jedna grupa je „kopií“ druhé. Tvrzení 1.5 implikuje, že izomorfismus dává ekvivalenci na třídě všech grup:

- reflexivita: $\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}$ je zaručeno izomorfismem $id : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$;
- symetrie: je-li $\mathbf{G} \simeq \mathbf{H}$ pomocí izomorfismu φ, pak $\mathbf{H} \simeq \mathbf{G}$ pomocí izomorfismu φ^{-1};
- tranzitivita: je-li $\mathbf{G} \simeq \mathbf{H}$ pomocí izomorfismu φ a $\mathbf{H} \simeq \mathbf{K}$ pomocí izomorfismu ψ, pak $\mathbf{G} \simeq \mathbf{K}$ pomocí izomorfismu $\psi \circ \varphi$.

Na prosté homomorfismy lze nahlížet jako na izomorfismy mezi výchozí grupou a obrazem, tj. prostý homomorfismus $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ je izomorfismem $\mathbf{G} \simeq \mathbf{Im}(\varphi)$. Takovým homomorfismům se říká *vnoření* grupy $\mathbf{G}$ do grupy $\mathbf{H}$, tj. grupa $\mathbf{H}$ obsahuje izomorfní kopii $\mathbf{G}$ jako podgrupu.

Příklad. Grupy $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}^*$ jsou izomorfní. Podívejme se na tabulky jejich operací:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Tyto tabulky vypadají podobně: jedna je kopií druhé, pokud přepíšeme $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto -1$. Toto zobrazení, které můžeme také zapsat $a \mapsto (-1)^a$, je grupový izomorfismus.

Příklad. Grupy $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jsou izomorfní. Intuitivně, komplexní čísla odpovídají dvojicím reálných čísel, v obou interpretacích se sčítají jednotlivé složky. Není těžké ověřit, že zobrazení $a + bi \mapsto (a, b)$ je grupový izomorfismus $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Příklad. Grupy $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbb{C}_n = \langle \zeta_n \rangle_{\mathbb{C}^*}$, kde $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$, jsou izomorfní. Intuitivně, komplexní čísla tvaru ζ_n^k se násobí tak, že se exponenty sčítají modulo n. Není těžké ověřit, že zobrazení $k \mapsto \zeta_n^k$ je grupový izomorfismus $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{C}_n$.

Příklad. Všechny tři grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8^*$ a $\{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \leq \mathbf{S}_4$ jsou navzájem izomorfní. Není to vidět na první pohled, ale intuice se dá vybudovat přes generátory: všechny tři grupy lze napsat jako $\mathbf{G} = \langle a, b \rangle$, kde $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ a $ab = ba$ je ten třetí prvek různý od jednotky. Formální důkaz si udělejte jako cvičení.

1.3. **Neizomorfismus.**

Viděli jsme, že zobrazení $a+bi \mapsto (a, b)$ je izomorfismem grup $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ale není izomorfismem grup $\mathbb{C}^*$ a $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Nemohly by tyto grupy být izomorfní použitím nějakého jiného izomorfismu?

Podobně, čínská věta o zbytcích tvrdí, že pro m, n nesoudělná je $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Jak je tomu pro m, n soudělná? Zobrazení $x \mapsto (x \bmod m, x \bmod n)$ není ani prosté, ani na: čísla 0 i $\mathrm{NSN}(m, n)$ se zobrazí na dvojici $(0, 0)$. Nemohly by ale tyto grupy být izomorfní použitím nějakého jiného izomorfismu?

Obecným principem, který umožňuje řešit takové úlohy, jsou *invarianty*. Vlastnost V nazveme invariantem, pokud pro každou dvojici izomorfních grup $\mathbf{G} \simeq \mathbf{H}$ platí, že pokud má grupa $\mathbf{G}$ vlastnost V, pak má i grupa $\mathbf{H}$ vlastnost V.

Příkladem invariantu je počet prvků daného řádu: je-li φ izomorfismus, podle Tvrzení 1.4 je řád a a $\varphi(a)$ vždy stejný.

Příklad.

- Grupa $\mathbb{Z}_{mn}$ obsahuje prvek řádu mn. Avšak v grupě $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ mají všechny prvky řád nejvýše $\mathrm{NSN}(m, n)$. Čili pokud jsou m, n soudělné, tyto grupy nemohou být izomorfní.
- Grupa $\mathbb{C}^*$ obsahuje prvky libovolného řádu, avšak grupa $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ obsahuje pouze prvky řádu $1, 2, \infty$. Čili tyto grupy nemohou být izomorfní.
- Kvaternionová grupa $\mathbf{Q}_8$ i dihedrální grupa $\mathbf{D}_8$ obsahují prvky řádů $1, 2, 4$. Avšak $\mathbf{Q}_8$ obsahuje šest prvků řádu 4, zatímco $\mathbf{D}_8$ pouze dva, takže nemohou být izomorfní.

Jiným příkladem invariantu je minimální počet generátorů.

Tvrzení 1.6. *Buď $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ homomorfismus grup, který je* na. *Je-li $\mathbf{G} = \langle X \rangle$, pak $\mathbf{H} = \langle \varphi(X) \rangle$.*

Důkaz. Prvek $b \in H$ napíšeme jako $b = \varphi(a)$ pro nějaký $a \in G$, prvek a vyjádříme v generátorech jako $a = u_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot u_n^{k_n}$, kde $u_i \in X$, a prvek b dostaneme jako $b = \varphi(a) = \varphi(u_1)^{k_1} * \ldots * \varphi(u_n)^{k_n} \in \langle \varphi(X) \rangle$. □

Na rozdíl od vektorových prostorů, v grupách mohou být minimální generující množiny různě velké, např. $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$. Invariantem je *nejmenší* počet prvků, který je potřeba k nagenerování dané grupy.

Příklad. Grupy $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nejsou izomorfní, protože grupu $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nelze nagenerovat jedním prvkem: podgrupa $\langle(a,b)\rangle = \{(ka,kb) : k\in\mathbb{Z}\}$ obsahuje dvojici $(1,1)$ pouze pro $(a,b)=\pm(1,1)$, ale ani jedna z těchto dvojic $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ negeneruje. O něco složitější argument by prošel i pro úlohu $\mathbb{Z}_{mn}\not\cong\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ pro soudělná m,n.

Uvedené dva invarianty umožňují prokázat neizomorfismus ve spoustě případů, ale ne ve všech. Příkladem je dvojice grup $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}^+ = \{a\in\mathbb{Q} : a>0\} \leq \mathbb{Q}^*$, které nejsou konečně generované a kromě jednotky obsahují pouze prvky nekonečných řádů.

Příklad. Existence odmocnin, tj. vlastnost „pro každé a existuje b takové, že $a=b^2$“, je invariantem. Mějme izomorfismus $\varphi:\mathbf{G}\to\mathbf{H}$ a předpokládejme, že tato vlastnost platí v grupě $\mathbf{G}$. Prvek $u\in H$ napíšeme jako $u=\varphi(a)$, vezmeme $b\in G$ takové, že $a=b\cdot b$ a položíme $v=\varphi(b)$. Vidíme, že $u=\varphi(a)=\varphi(b^2)=\varphi(b)^2=v^2$.

Tento invariant je splněn v grupě $\mathbb{Q}$, kde jde o vlastnost „pro každé $a\in\mathbb{Q}$ existuje $b\in\mathbb{Q}$ takové, že $a=2b$“. Ale není splněn v grupě $\mathbb{Q}^+$, kde jde o vlastnost „pro každé $0<a\in\mathbb{Q}$ existuje $0<b\in\mathbb{Q}$ takové, že $a=b^2$“.

Obecně lze říci, že invariantem je každá vlastnost, kterou lze zformulovat pomocí operací dané struktury, rovnosti, logických spojek a kvantifikátorů (tzv. formule prvního řádu), podrobně to najdete v nějaké učebnici matematické logiky. Ani tyto invarianty však nemusí pomoci. Příkladem jsou grupy $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, které nelze odlišit žádnou formulí prvního řádu, ale přesto nejsou izomorfní (viz cvičení).

1.4. **Klasifikační věty.**

Jedním ze základních cílů každé algebraické teorie je tzv. *klasifikace* objektů, tj. *úplný seznam* všech příkladů *až na izomorfismus*. Obvykle není možné provést takovou klasifikaci kompletně, ale často je možné klasifikovat objekty s nějakou speciální, nicméně důležitou vlastností.

Asi nejjednodušším příkladem je *klasifikace cyklických grup*. Grupa se nazývá *cyklická*, pokud má jeden generátor. Každá taková grupa je izomorfní právě jedné z grup $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{Z}_n$. Jinými slovy, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}_n$ jsou, až na izomorfismus, všechny příklady cyklických grup.

Věta 1.7 (klasifikace cyklických grup)**.** *Buď* $\mathbf{G}$ *cyklická grupa.*

(1) *Je-li* $\mathbf{G}$ *nekonečná, pak je izomorfní grupě* $\mathbb{Z}$*.*
(2) *Je-li* $\mathbf{G}$ *konečná řádu* n*, pak je izomorfní grupě* $\mathbb{Z}_n$*.*

Důkaz. Buď $\mathbf{G}=\langle a\rangle$ cyklická grupa.

(1) Předpokládejme, že je $\mathbf{G}$ nekonečná, tedy $\operatorname{ord}(a)=\infty$, a uvažujme zobrazení

$$\mathbb{Z}\to\mathbf{G},\qquad k\mapsto a^k.$$

Toto zobrazení je homomorfismus, neboť $a^k\cdot a^l = a^{k+l}$. Přitom jádro je triviální, protože $a^k\neq 1$ pro všechna $k\neq 0$, takže podle Tvrzení 1.3 jde o prosté zobrazení. Z prvního semestru víme, že je toto zobrazení na $\mathbf{G}$.

(2) Předpokládejme, že je $\mathbf{G}$ řádu n, tedy $\operatorname{ord}(a)=n$, a uvažujme zobrazení

$$\mathbb{Z}_n\to\mathbf{G},\qquad k\mapsto a^k.$$

Toto zobrazení je homomorfismus, neboť $a^k\cdot a^l = a^{k+l} = a^{k+l \bmod n}$, přičemž druhá rovnost plyne z následující úvahy: pokud $k+l<n$, tvrzení je triviální; pokud $k+l\geq n$, pak $k+l \bmod n = k+l-n$, a tedy $a^{k+l \bmod n} = a^{k+l}\cdot a^{-n} = a^{k+l}\cdot 1^{-1} = a^{k+l}$. Podobně jako pro nekonečnou grupu dostáváme, že jádro je triviální a že jde o zobrazení na $\mathbf{G}$. □

Mnohem komplikovanější je *klasifikace konečně generovaných abelovských grup*, která říká, že každá abelovská grupa s konečnou množinou generátorů je izomorfní

direktnímu součinu konečně mnoha cyklických grup. Navíc, použitím čínské věty o zbytcích ve formě Tvrzení 4.4, konečné cyklické grupy stačí uvažovat pouze řádu mocniny prvočísla. Tyto komponenty jsou navíc jednoznačně určené (až na pořadí), tj. volbou neizomorfních cyklických grup dostaneme neizomorfní direktní součiny.

Věta 1.8 (klasifikace konečných abelovských grup)**.** *Buď* $\mathbf{G}$ *konečně generovaná abelovská grupa,* $|\mathbf{G}| > 1$*. Pak existují* $m, n \geq 0$*, prvočísla* $p_1, \ldots, p_m$ *(ne nutně po dvou různá) a přirozená čísla* $k_1, \ldots, k_m$ *taková, že*

$$\mathbf{G} \simeq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_m^{k_m}}.$$

Čísla m, n *jsou určena jednoznačně a čísla* $p_1^{k_1}, \ldots, p_m^{k_m}$ *jednoznačně až na pořadí.*

Důkaz této věty je poměrně zdlouhavý, najdete jej v každé učebnici teorie grup.

Příklad. Podle Věty 1.8 je každá čtyřprvková abelovská grupa izomorfní buď grupě $\mathbb{Z}_4$, nebo grupě $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

- Grupa $\mathbb{Z}_5^*$ je také čtyřprvková. Vidíme, že $\operatorname{ord}(2) = 4$, takže $\mathbb{Z}_5^* \simeq \mathbb{Z}_4$.
- Grupa $\mathbb{Z}_8^*$ je také čtyřprvková. Vidíme, že $\operatorname{ord}(3) = \operatorname{ord}(5) = \operatorname{ord}(7) = 2$, takže $\mathbb{Z}_8^* \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Oblíbenou kratochvílí grupařů je hledání malých grup, což je svým způsobem také klasifikační věta. V současné době je znám seznam všech grup až do velikosti $2047 = 2^{11} - 1$. Následující tabulka obsahuje klasifikaci všech grup řádu n pro $n \leq 15$ a pro $n = p$, $2p$, p^2, kde p je prvočíslo.

n	grupy řádu n
1	$\mathbb{Z}_1$
2	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_3$
4	$\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
5	$\mathbb{Z}_5$
6	$\mathbb{Z}_6,\ \mathbf{S}_3 = \mathbf{D}_6$
7	$\mathbb{Z}_7$
8	$\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbf{D}_8,\ \mathbf{Q}_8$
p	$\mathbb{Z}_p$
p^2	$\mathbb{Z}_{p^2},\ \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$
$2p$	$\mathbb{Z}_{2p},\ \mathbf{D}_{2p}$
12	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{X}$
15	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$

Případ $n = p$ je důsledkem Lagrangeovy věty: grupa prvočíselné velikosti nemůže mít vlastní podgrupy, takže musí být generovaná libovolným svým prvkem (kromě jednotky) a podle klasifikace cyklických grup musí být izomorfní $\mathbb{Z}_p$. Ostatní případy jsou znatelně těžší.

2. Faktorgrupy

2.1. **Normální podgrupy.**

Předmětem této sekce je velmi důležitá konstrukce *faktorgrup*. Jako parametr slouží jistý typ podgrup, zvaných normální. S tímto pojmem se nyní seznámíme.

Tvrzení 2.1 (ekvivalentní definice normální podgrupy)**.** *Buď* $\mathbf{G}$ *grupa a* $\mathbf{H}$ *její podgrupa. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) $aH = Ha$ *pro každé* $a \in G$ *(tj. levé a pravé rozkladové třídy daného prvku jsou stejné),*
(2) $aha^{-1} \in H$ *pro každé* $h \in H$ *a každé* $a \in G$ *(tj. je uzavřena na konjugaci libovolným prvkem).*

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Buď $h \in H$ a $a \in G$. Pak $ah \in aH = Ha$, a tedy existuje $k \in H$ takové, že $ah = ka$. Dostáváme $aha^{-1} = k \in H$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Dokážeme obě inkluze v rovnosti $aH = Ha$. Nejprve uvažujme $ah \in aH$. Pak $k = aha^{-1} \in H$, a tedy $ah = ka \in Ha$. Nyní uvažujme $ha \in Ha$. Pak $l = a^{-1}ha \in H$, tedy $ha = al \in aH$. □

Definice. Podgrupa $\mathbf{H}$ se nazývá *normální* v grupě $\mathbf{G}$, pokud splňuje ekvivalentní podmínky formulované v Tvrzení 2.1. Tento fakt značíme $\mathbf{H} \trianglelefteq \mathbf{G}$.

V abelovských grupách je každá podgrupa normální, obě ekvivalentní podmínky jsou triviálně splněny. Z triviálních důvodů platí také $\{1\} \trianglelefteq \mathbf{G}$ a $\mathbf{G} \trianglelefteq \mathbf{G}$.

Příklad.

- Podgrupa $\mathbf{SL}_n(\mathbf{T})$ matic s determinantem 1 je normální v grupě $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$, jak plyne z podmínky (2) užitím součinového vzorce pro determinanty: $\det(AHA^{-1}) = (\det A)(\det H)(\det A)^{-1} = \det H$.
- Podgrupa $\mathbf{A}_n$ sudých permutací je normální v grupě $\mathbf{S}_n$, jak plyne ze součinového vzorce pro znaménko: $\operatorname{sgn}(aha^{-1}) = (\operatorname{sgn} a)(\operatorname{sgn} h)(\operatorname{sgn} a)^{-1} = \operatorname{sgn} h$.
- Podgrupa $\mathbf{D}_{2n}$ není normální v grupě $\mathbf{S}_n$.

Na závěr uvedeme jedno důležité pozorování doplňující Tvrzení 1.2.

Tvrzení 2.2. *Jádro homomorfismu je normální podgrupa.*

Důkaz. Uvažujme $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$. V Tvrzení 1.2 jsme dokázali, že $\mathbf{Ker}(\varphi)$ je podgrupa. Normalita plyne z toho, že pro libovolné $a \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ a $u \in G$ platí $\varphi(uau^{-1}) = \varphi(u) * \varphi(a) * \varphi(u)' = \varphi(u) * \varphi(u)' = e$. □

2.2. **Konstrukce faktorgrupy.**
V různých odvětvích matematiky se opakuje myšlenka konstrukce faktorobjektu. Neformálně řečeno, je dán objekt s velmi jemnou strukturou (hvězdy na obloze). Pokud od objektu poodstoupíme, některé prvky splynou (při pohledu pouhým okem například hvězdy v jedné galaxii). To, co vidíme, je faktorobjekt původního objektu (světlé body na obloze). O trochu formálněji, ztotožníme *podobné* objekty (na obloze ty, které jsou příliš blízko). Co se přesně myslí relací podobnosti už závisi na konkrétním typu objektu.

Definice. Buď $\mathbf{G}$ grupa a $\mathbf{N}$ její normální podgrupa. Definujeme relaci na množině G předpisem

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b^{-1} \in N.$$

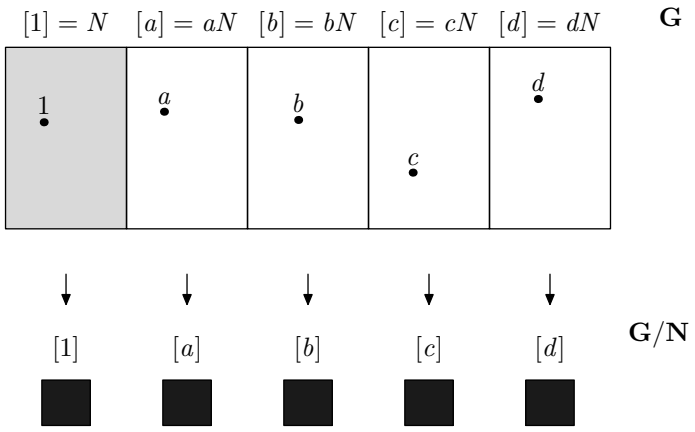
Podle jednoho z lemmat ze sekce o Lagrangeově větě je $a \sim b$ právě tehdy, když $Na = Nb$, čili relace $\sim$ je ekvivalencí na množině G. Její bloky jsou rozkladové třídy grupy $\mathbf{G}$ podle podgrupy $\mathbf{N}$, a protože je $\mathbf{N}$ normální, levé i pravé rozkladové třídy jsou totéž (Tvrzení 2.1), čili

$$[a] = aN = Na.$$

Na těchto blocích definujeme operace předpisy

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b] \qquad \text{a} \qquad [a]^{-1} = [a^{-1}]$$

(v následujícím lemmatu ověříme, že je tato definice korektní, tj. že výsledek operace nezávisí na tom, kterým prvkem si daný blok označíme), za jednotkový prvek



Obrázek 2. Konstrukce faktorgrupy

vezmeme blok $[1] = N$. Množina bloků s výše uvedenými operacemi se nazývá *faktorgrupa grupy* $\mathbf{G}$ *podle podgrupy* $\mathbf{N}$,

$$\mathbf{G}/\mathbf{N} = (\{[a] : a \in G\}, \cdot, ^{-1}, [1]).$$

Lemma 2.3. *Buď* $\mathbf{G}$ *grupa a* $\mathbf{N}$ *její normální podgrupa.*

(1) *Výše uvedené operace na blocích jsou dobře definovány.*
(2) *Faktorgrupa* $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ *je skutečně grupa.*

Důkaz. (1) Uvažujme dva bloky označené dvěma způsoby, $[a] = [c]$ a $[b] = [d]$. Ověříme, že $[a \cdot b] = [c \cdot d]$ a $[a^{-1}] = [c^{-1}]$. Protože $a \sim c$ a $b \sim d$, tj. $a \cdot c^{-1} \in N$ a $b \cdot d^{-1} \in N$, z uzavřenosti množiny N na násobení i konjugaci libovolným prvkem dostáváme

$$(ab) \cdot (cd)^{-1} = abd^{-1}c^{-1} = ac^{-1}cbd^{-1}c^{-1} = \underbrace{(ac^{-1})}_{\in N} \cdot \underbrace{c(bd^{-1})c^{-1}}_{\in N} \in N,$$

čili $a \cdot b \sim c \cdot d$, tj. $[a \cdot b] = [c \cdot d]$. Pro inverz stačí využít faktu, že $ac^{-1} \in N \Leftrightarrow a^{-1}c \in N$, protože levé i pravé rozkladové třídy jsou stejné, a tedy $Na = Nc \Leftrightarrow aN = cN$.

(2) Ověříme, že $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ splňuje axiomy grup. Operace $\cdot$ je asociativní, neboť $[a] \cdot ([b] \cdot [c]) = [a \cdot (b \cdot c)] = [(a \cdot b) \cdot c] = ([a] \cdot [b]) \cdot [c]$, a podobně se ověří i $[a] \cdot [1] = [a \cdot 1] = [a] = [1 \cdot a] = [1] \cdot [a]$ a $[a] \cdot [a]^{-1} = [a \cdot a^{-1}] = [1] = [a]^{-1} \cdot [a]$. □

Příklad. Uvažujme grupu $\mathbf{G} = \mathbb{Z}$ a normální podgrupu $\mathbf{H} = n\mathbb{Z}$. Platí

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; n \mid a - b \;\Leftrightarrow\; a \equiv b \pmod{n},$$

bloky této ekvivalence jsou rozkladové třídy

$$[a] = \{k \in \mathbb{Z} :\; k \equiv a \pmod{n}\} = a + n\mathbb{Z}, \quad a = 0, \ldots, n-1.$$

Přitom $[a] + [b] = [a + b] = [a + b \bmod n]$ a $-[a] = = [-a] = [n - a]$, čili operace na prvcích $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jsou jako operace na číslech $0, \ldots, n-1$ modulo n. Není těžké ověřit, že $[a] \mapsto a$ je izomorfismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$.

Příklad. Uvažujme grupu $\mathbf{G} = \mathbf{S}_n$ a normální podgrupu $\mathbf{H} = \mathbf{A}_n$. Platí

$$\pi \sim \sigma \;\Leftrightarrow\; \pi \circ \sigma^{-1} \in A_n \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\sigma),$$

čili tato ekvivalence má právě dva bloky: množinu S sudých permutací a množinu L lichých permutací. Operace na těchto třídách je $S \circ S = L \circ L = S$ a $S \circ L = L \circ S = L$, jde o dvouprvkovou grupu izomorfní grupě $\mathbb{Z}^*$.

Jak jednoduše, ale přitom formálně určit, jak vypadá faktorgupa dané grupy? Pomůže nám následující věta, která dává do souvislosti faktorgrupy a homomorfní obrazy grup.

Věta 2.4 (věta o homomorfismu)**.** *Buď $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ homomorfismus grup.*

(1) *Je-li $\mathbf{N} \leq \mathbf{Ker}(\varphi)$ normální podgrupa grupy $\mathbf{G}$, pak je zobrazení*

$$\psi : \mathbf{G}/\mathbf{N} \to \mathbf{H}, \qquad [a] \mapsto \varphi(a)$$

dobře definované a je to grupový homomorfismus.

(2) (1. věta o izomorfismu) $\mathbf{G}/\mathbf{Ker}(\varphi) \simeq \mathbf{Im}(\varphi)$.

Důkaz. (1) Předně je třeba ověřit, že je zobrazení ψ dobře definované: mohlo by se stát, že máme tentýž blok označen dvěma různými způsoby, tj. že $[a] = [b]$ pro nějaká $a \neq b$, a přitom se těmto blokům snažíme přiřadit dvě různé hodnoty $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Ovšem

$$[a] = [b] \;\Leftrightarrow\; a \cdot b^{-1} \in N \;\Rightarrow\; a \cdot b^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \varphi(a \cdot b^{-1}) = 1 \;\Leftrightarrow\; \varphi(a) = \varphi(b),$$

tedy ψ je dobře definované zobrazení. Protože $\psi([a \cdot b]) = \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = = \psi([a]) \cdot \psi([b])$, je to homomorfismus.

(2) Použijeme (1) pro $\mathbf{N} = \mathbf{Ker}(\varphi)$. Výsledný homomorfismus je prostý, neboť

$$[a] = [b] \;\Leftrightarrow\; a \cdot b^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \varphi(a \cdot b^{-1}) = 1 \;\Leftrightarrow\; \varphi(a) = \varphi(b),$$

a uvažujeme-li jej jako zobrazení $\mathbf{G}/\mathbf{Ker}(\varphi) \to \mathbf{Im}(\psi) = \mathbf{Im}(\varphi)$, pak je také na. □

1. věta o izomorfismu je dobrým nástrojem, pokud chceme určit, jak vypadá daná faktorgrupa. Chceme-li dokázat, že $\mathbf{G}/\mathbf{N} \simeq \mathbf{H}$, stačí najít homomorfismus z $\mathbf{G}$ na $\mathbf{H}$, jehož jádrem je $\mathbf{N}$. Metodu ilustrujeme na několika příkladech.

Příklad. Jak vypadá faktorgrupa $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Analýzu situace jsme provedli výše a vidíme, že bychom měli hledat homomorfismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, jehož jádrem je podgrupa $n\mathbb{Z}$. Situaci řeší zobrazení $a \mapsto a \bmod n$, které je očividně homomorfismem na $\mathbb{Z}_n$, jehož jádrem je $\{a \in \mathbb{Z} :\ a \bmod n = 0\} = n\mathbb{Z}$. Podle 1. věty o izomorfismu

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n.$$

Příklad. Jak vypadá faktorgrupa $\mathbf{S}_n/\mathbf{A}_n$? Analýzu situace jsme provedli výše a vidíme, že bychom měli hledat homomorfismus $\mathbf{S}_n \to \mathbb{Z}^*$, jehož jádrem je podgrupa A_n. Situaci řeší zobrazení $\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$, které je očividně homomorfismem na $\mathbb{Z}^*$, jehož jádro tvoří sudé permutace. Podle 1. věty o izomorfismu

$$\mathbf{S}_n/\mathbf{A}_n \simeq \mathbb{Z}^*.$$

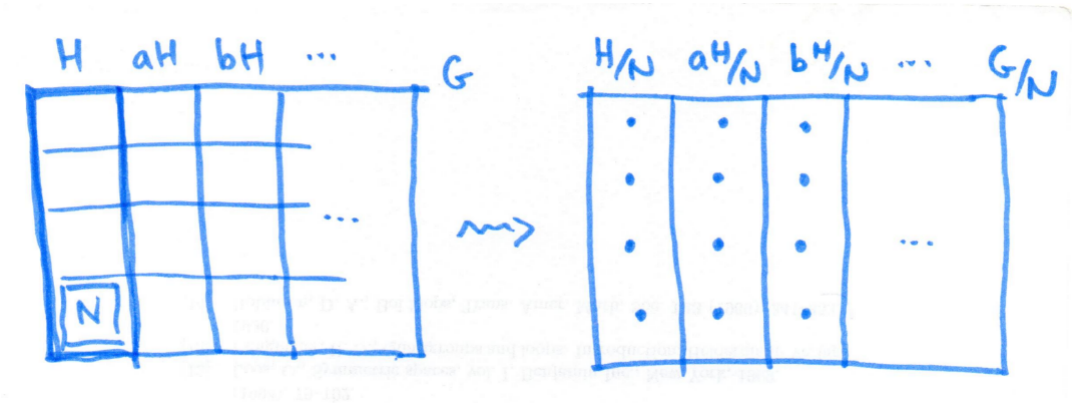
Příklad. Jak vypadá faktorgrupa $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})/\mathbf{SL}_n(\mathbf{T})$? Platí

$$A \sim B \;\Leftrightarrow\; AB^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{T}) \;\Leftrightarrow\; \det AB^{-1} = \det A(\det B)^{-1} = 1 \;\Leftrightarrow\; \det A = \det B.$$

Bloky této ekvivalence jsou tedy určeny hodnotou determinantu, kterou může být libovolný nenulový prvek tělesa. Přitom determinant součinu je součin determinantů, tedy bloky se násobí tak, jak se násobí příslušné prvky tělesa, čili faktorgrupa $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})/\mathbf{SL}_n(\mathbf{T})$ by měla být izomorfní grupě $\mathbf{T}^*$. Skutečně, zobrazení $\det : \mathbf{GL}_n(\mathbf{T}) \to \mathbf{T}^*$ je homomorfismem na grupu $\mathbf{T}^*$, jehož jádro tvoří matice s determinantem 1, čili podgrupa $\mathbf{SL}_n(\mathbf{T})$. Podle 1. věty o izomorfismu je

$$\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})/\mathbf{SL}_n(\mathbf{T}) \simeq \mathbf{T}^*.$$

Jsou případy, kdy podobná analýza nedává žádný dobrý náhled. Leckdy je možné použít dalších triků, například úvah o počtu prvků a znalosti malých grup.



Obrázek 3. Ilustrace 2. věty o izomorfismu. Větší podgrupa $\mathbf{H}$ určuje hrubší ekvivalenci (s většími bloky).

Příklad. Ukážeme, jak vypadá faktorgrupa $\mathbf{S}_4/\mathbf{K}$, kde $K = \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$. Podle Lagrangeovy věty je $|\mathbf{S}_4/\mathbf{K}| = [\mathbf{S}_4 : \mathbf{K}] = 24/4 = 6$, čili faktorgrupa $\mathbf{S}_4/\mathbf{K}$ je izomorfní buď grupě $\mathbf{S}_3$, nebo cyklické grupě $\mathbb{Z}_6$. Dokážeme, že není abelovská, což potvrdí první variantu:

$$[(1\,2\,3)] \circ [(1\,2\,3\,4)] = [(1\,2\,3) \circ (1\,2\,3\,4)] = [(1\,3\,4\,2)],$$
$$[(1\,2\,3\,4)] \circ [(1\,2\,3)] = [(1\,2\,3\,4) \circ (1\,2\,3)] = [(1\,3\,2\,4)],$$

ovšem $[(1\,3\,4\,2)] \neq [(1\,3\,2\,4)]$, neboť $(1\,3\,4\,2) \circ (1\,3\,2\,4)^{-1} = (1\,2\,4) \notin K$.

Jiným příkladem použití 1. věty o izomorfismu je elegantnější důkaz klasifikace cyklických grup.

Alternativní důkaz Věty 1.7. Buď $\mathbf{G} = \langle a \rangle$ cyklická grupa a uvažujme zobrazení

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbf{G}, \qquad k \mapsto a^k.$$

To je zřejmě na $\mathbf{G}$. Je-li φ také prosté, pak je izomorfismem $\mathbf{G} \simeq \mathbb{Z}$. V opačném případě je $\mathbf{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$, kde $n = \mathrm{ord}(a)$, a podle 1. věty o izomorfismu je $\mathbf{G} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$. □

Jak vypadají podgrupy faktorgrup? O tom hovoří 2. věta o izomorfismu.

Tvrzení 2.5 (2. věta o izomorfismu)**.** *Buď* $\mathbf{G}$ *grupa a* $\mathbf{N}$ *její normální podgrupa.*

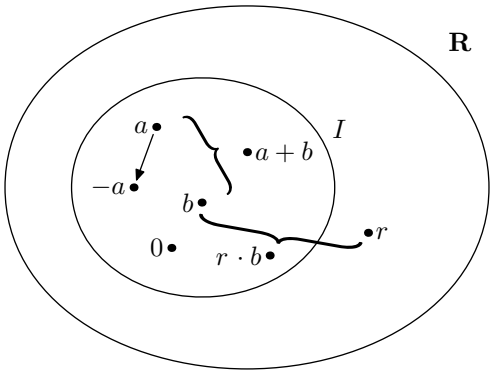
(1) *Je-li* $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{H} \trianglelefteq \mathbf{G}$*, pak* $\mathbf{H}/\mathbf{N}$ *je normální podgrupa v* $\mathbf{G}/\mathbf{N}$*.*
(2) *Je-li* $\mathbf{K} \trianglelefteq \mathbf{G}/\mathbf{N}$*, pak existuje normální podgrupa* $\mathbf{H} \trianglelefteq \mathbf{G}$ *taková, že* $\mathbf{K} = \mathbf{H}/\mathbf{N}$*.*
(3) *Pro* $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{H} \trianglelefteq \mathbf{G}$ *platí*

$$(\mathbf{G}/\mathbf{N})/(\mathbf{H}/\mathbf{N}) \simeq \mathbf{G}/\mathbf{H}.$$

Důkaz. (1) Buď $[a], [b]$ prvky $\mathbf{H}/\mathbf{N}$, čili $a, b \in H$, a buď $[g]$ prvek $\mathbf{G}/\mathbf{N}$. Pak $[a][b] = [ab]$ je prvek $\mathbf{H}/\mathbf{N}$, protože $ab \in H$, a ze stejného důvodu jsou $\mathbf{H}/\mathbf{N}$ také $[1]$, $[a]^{-1} = [a^{-1}]$ a $[g][a][g]^{-1} = [gag^{-1}]$.

(2) Buď $H = \{a \in G : \ [a] \in K\}$. Pro $a, b \in H$ a $g \in G$ platí $ab \in H$, protože $[ab] = [a][b] \in K$, a ze stejného důvodu jsou prvky $\mathbf{H}$ také 1, a^{-1} a gag^{-1}. Zjevně $\mathbf{K} = \mathbf{H}/\mathbf{N}$.

(3) Uvažujme homomorfismus $\varphi : \mathbf{G}/\mathbf{N} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$, $[a]_{\mathbf{N}} \mapsto [a]_{\mathbf{H}}$. Je dobře definovaný, protože $\mathbf{N} \leq \mathbf{H}$, a tedy $[a]_{\mathbf{N}} = [b]_{\mathbf{N}}$ implikuje $[a]_{\mathbf{H}} = [b]_{\mathbf{H}}$. Je to homomorfismus, $\varphi([a]_{\mathbf{N}}[b]_{\mathbf{N}}) = \varphi([ab]_{\mathbf{N}}) = [ab]_{\mathbf{H}} = [a]_{\mathbf{H}}[b]_{\mathbf{H}} = \varphi([a]_{\mathbf{N}})\varphi([b]_{\mathbf{N}})$. Jeho obraz je



Obrázek 4. Ideál I v oboru $\mathbf{R}$.

celé $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ a jeho jádro sestává z těch $[a]_{\mathbf{N}}$, pro které je $a \in H$, tedy $\mathbf{Ker}(\varphi) = \mathbf{H}/\mathbf{N}$. Aplikací 1. věty o izomorfismu dostaneme uvedený vztah. □

3. Ideály a dělitelnost

Než se dostaneme k okruhovým homomorfismům a ke konstrukci faktorokruhu, je potřeba pochopit pojem ideálu, který hraje v okruzích stejnou roli jako v grupách normální podgrupy.

3.1. **Ideály.**

Definice. Buď $\mathbf{R}$ komutativní okruh. *Ideálem* v $\mathbf{R}$ nazýváme každou neprázdnou podmnožinu $I \subseteq R$ takovou, že

- pokud $a, b \in I$, pak $-a \in I$ a $a + b \in I$,
- pokud $a \in I$ a $r \in R$, pak $r \cdot a \in I$.

Příklad. Množiny $n\mathbb{Z} = \{nz : \ z \in \mathbb{Z}\} = \{u \in \mathbb{Z} : \ n \mid u\}$ jsou ideály v oboru $\mathbb{Z}$. Žádné jiné ideály v oboru $\mathbb{Z}$ nejsou, což si můžete dokázat jako cvičení. Plyne to také z Věty 3.2.

Konstrukci ideálů z předchozího příkladu lze zobecnit.

Tvrzení 3.1 (definice hlavních ideálů)**.** *Buď $\mathbf{R}$ komutativní okruh a $a \in R$. Pak*

$$aR = \{ar : \ r \in R\} = \{u \in R : \ a \mid u\}$$

je ideál v $\mathbf{R}$. Obsahuje-li $\mathbf{R}$ jednotku, pak aR je nejmenší ideál (nejmenší vzhledem k inkluzi) obsahující prvek a.

Důkaz. Součet a rozdíl dvou prvků dělitelných a je dělitelný a, a pokud $a \mid u$, pak $a \mid ru$ pro libovolné $r \in R$. Čili aR je ideál.

Buď I libovolný ideál obsahující prvek a. Pak I jistě obsahuje i všechny jeho násobky, čili $aR \subseteq I$, a tedy aR je nejmenším ideálem obsahujícím prvek a. □

Definice. Ideály z Tvrzení 3.1 se nazývají *hlavní*. Speciálně, $\{0\} = 0R$ a $R = 1R$ jsou hlavní ideály v libovolném komutativním okruhu s jednotkou; říká se jim *nevlastní*.

Hlavní ideály pěkně odrážejí dělitelnost: z tranzitivity relace dělitelnosti ihned plyne, že

- $a \mid b$ právě tehdy, když $bR \subseteq aR$;
- $a \parallel b$ právě tehdy, když $aR = bR$.

Původní motivací studia ideálů bylo řešení problému nejednoznačných ireducibilních rozkladů. Idea byla, že nejednoznačnost je způsobena jakýmisi chybějícími prvky, které by dělily činitele v těchto nejednoznačných rozkladech. Například v $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ máme $4 = 2^2 = (1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})$, kdyby ovšem existovaly nějaké „ideální ireducibilní prvky“ (ideální ve smyslu hypotetické) p, q takové, že $2 = pq$, $1+\sqrt{5} = p^2$ a $-1+\sqrt{5} = q^2$, najednou bychom měli jeden rozklad $4 = p^2q^2$. Těmito „ideálními prvky“ se nakonec ukázaly být tzv. prvoideály, definici uvidíme později. Moderní algebraická teorie čísel pak vychází z poznatku, že v mnoha oborech, včetně $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, lze každý ideál rozložit jednoznačně na součin prvoideálů.

3.2. **Obory hlavních ideálů.**

Definice. Komutativní okruhy, které neobsahují jiné ideály než hlavní, nazýváme *okruhy hlavních ideálů*; v případě oborů integrity hovoříme o *oborech hlavních ideálů*.

Cílem této podsekce je zařadit obory hlavních ideálů do hierarchie oborů integrity z hlediska dělitelnosti.

Příklad. Obory $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbf{T}[x]$, $\mathbf{T}$ těleso, jsou obory hlavních ideálů. Obecněji, eukleidovské obory mají pouze hlavní ideály (Věta 3.2).

Opačná implikace neplatí, ale najít nějaký příklad není snadné. Asi nejjednodušším příkladem neeukleidovského oboru hlavních ideálů je $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ a důkaz tohoto faktu je poměrně obtížný.

V zimním semestru jsme ukázali, že obory $\mathbb{Z}[x]$ ani obory polynomů více proměnných nejsou eukleidovské, protože v nich neplatí Bézoutova rovnost. Ukážeme, že v nich také existuje ideál, který není hlavní. Oba příklady jsou založené na následující myšlence. Je-li aR hlavní ideál, který obsahuje dva nesoudělné prvky u, v, pak $aR = R$: z $u, v \in aR$ plyne $a \mid u$ i $a \mid v$, čili $a \parallel 1$, a tedy $aR = R$.

Příklad. Obor $\mathbb{Z}[x]$ není obor hlavních ideálů. Uvažujme množinu

$$I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : \ f(0) \text{ je sudé}\} \subset \mathbb{Z}[x].$$

Je vidět, že jde o ideál. Přitom I obsahuje polynomy 2 a x, které jsou nesoudělné, nemůže tedy být hlavní.

Příklad. Obor $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_k]$ (kde $\mathbf{R}$ je libovolný obor integrity a $k > 1$) není obor hlavních ideálů. Uvažujme množinu

$$I = \{f \in R[x_1, \ldots, x_k] : \ f(0, \ldots, 0) = 0\} \subset R[x_1, \ldots, x_k].$$

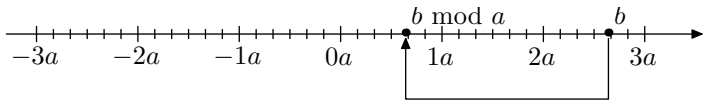
Je vidět, že jde o ideál. Přitom I obsahuje polynomy x_1 a x_2, které jsou nesoudělné, nemůže tedy být hlavní.

Věta 3.2. *V eukleidovských oborech je každý ideál hlavní.*

Důkaz. Buď I ideál v eukleidovském oboru $\mathbf{R}$. Je-li $I = \{0\}$, pak $I = 0R$. V opačném případě označme a takový prvek ideálu I, který má nejmenší nenulovou eukleidovskou normu (libovolný z nich, je-li jich více). Dokážeme, že $I = aR$. Zřejmě $aR \subseteq I$, pro spor tedy předpokládejme, že existuje nějaký prvek $b \in I \setminus aR$. Zvolme q, r splňující $b = aq + r$ a $\nu(r) < \nu(a)$. Samozřejmě $r \neq 0$, protože b není dělitelné a, a tedy $0 < \nu(r) < \nu(a)$. Ovšem

$$r = \underbrace{b}_{\in I} - \underbrace{aq}_{\in I} \in I,$$

což je spor s výběrem a jako prvku I s nejmenší kladnou normou. □



Obrázek 5. Ilustrace důkazu Věty 3.2 v případě $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$.

Tvrzení 3.3 (ideály v tělesech)**.** *Buď* $\mathbf{R}$ *komutativní okruh s jednotkou. Pak* $\mathbf{R}$ *je těleso právě tehdy, když má pouze nevlastní ideály.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Tělesa jsou eukleidovské obory, tedy každý ideál je hlavní. Pro každé $a \neq 0$ platí $a \parallel 1$, čili pro každý nenulový ideál aR platí $aR = 1R = R$.

($\Leftarrow$) Pro každý hlavní ideál aR, $a \neq 0$, platí $aR = R = 1R$, čili každý nenulový prvek a je invertibilní. □

Nyní si dokážeme jedno pomocné tvrzení o obecných ideálech.

Tvrzení 3.4 (průnik, součet a sjednocení ideálů)**.** *Buď* $\mathbf{R}$ *komutativní okruh.*

(1) *Jsou-li* I, J *ideály v* $\mathbf{R}$*, pak* $I \cap J$ *je také ideál v* $\mathbf{R}$*.*
(2) *Jsou-li* I, J *ideály v* $\mathbf{R}$*, pak* $I + J = \{a + b : \ a \in I, b \in J\}$ *je také ideál v* $\mathbf{R}$*. Tento ideál je nejmenší takový, že obsahuje* $I \cup J$*.*
(3) *Jsou-li* I_j*,* $j \in \mathbb{N}$*, ideály v* $\mathbf{R}$ *takové, že* $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$*, pak* $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ *je také ideál v* $\mathbf{R}$*.*

Důkaz. (1) Buď $a, b \in I \cap J$ a $r \in R$. Pak $a + b, -a, ra$ náleží do obou ideálů I, J, tedy i do jejich průniku.

(2) Buď $a + b, c + d \in I + J$, přičemž $a, c \in I$ a $b, d \in J$, a buď $r \in R$. Pak $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) \in I + J$, $-(a + b) = (-a) + (-b) \in I + J$ a $r(a+b) = ra+rb \in I+J$. Oba ideály I, J jsou podmnožinou $I+J$ a naopak, pokud ideál K obsahuje I i J, pak jistě obsahuje i všechny součty prvků z I a prvků z J, tedy $I + J \subseteq K$.

(3) Buď $a, b \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ a $r \in R$. Pak existují $j, k \in \mathbb{N}$ taková, že $a \in I_j$ a $b \in I_k$, čili $a, b \in I_{\max(j,k)}$, a tedy $a + b, -a, ra \in I_{\max(j,k)} \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$. □

Vztaženo na hlavní ideály, nejmenším ideálem obsahujícím dva prvky a, b je ideál

$$aR + bR = \{ar + bs : \ r, s \in R\},$$

a dále indukcí, nejmenším ideálem obsahujícím prvky $a_1, \ldots, a_n$, tzv. *ideál generovaný prvky* $a_1, \ldots, a_n$, je

$$a_1R + \cdots + a_nR = \{\sum a_i r_i : \ r_1, \ldots, r_n \in R.\}$$

Těmto prvkům se také říká *báze ideálu* (bez nároku na nezávislost, jak je zvykem v lineární algebře). Výše uvedené nehlavní ideály pak můžeme napsat jako $2\mathbb{Z}[x] + x\mathbb{Z}[x]$, resp. $x_1\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_k] + \ldots + x_k\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_k]$.

Nyní již můžeme dokázat, jak se obory hlavních ideálů zařazují do hierarchie oborů z hlediska teorie dělitelnosti.

Věta 3.5. *Obory hlavních ideálů jsou gaussovské a platí v nich Bézoutova rovnost.*

Důkaz. Buď $\mathbf{R}$ obor hlavních ideálů. Podle věty ze zimního semestru stačí dokázat, že v $\mathbf{R}$ (1) existují NSD a (2) neexistují nekonečné posloupnosti vlastních dělitelů. Připomeňme, že pro libovolná u, v platí $u \mid v \Leftrightarrow vR \subseteq uR$.

(1) Zvolme $a, b \in R$ a označme $I = aR + bR$. Každý ideál je hlavní, existuje tedy $c \in R$ takové, že $I = cR$. Protože $aR, bR \subseteq cR$, máme $c \mid a$ i $c \mid b$. Dále, pokud je d společným dělitelem a, b, pak $aR \subseteq dR$ a $bR \subseteq dR$, tedy $I = cR \subseteq dR$ a dostáváme $d \mid c$. Vidíme, že $c = \mathrm{NSD}(a, b)$ a navíc $c \in aR + bR$, tedy $c = ar + bs$ pro nějaká $r, s \in R$, což je Bézoutova rovnost.

(2) Pro spor předpokládejme, že v $\mathbf{R}$ existuje nekonečná posloupnost vlastních dělitelů $a_1, a_2, \ldots$ (tj. $a_{i+1} \mid a_i$ a $a_i \nmid a_{i+1}$). Pak $a_1R \subset a_2R \subset a_3R \subset \ldots$ a označme $I = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} a_iR$. Tato množina také tvoří ideál, takže $I = bR$ pro nějaké $b \in I$. Ovšem toto b musí být prvkem nějakého a_iR, pro nějaké $i \in R$. Ale pak $bR \subseteq a_iR \subset a_{i+1}R \subset \ldots \subset I = bR$, spor. □

Shrnutí:

$$\textit{eukleidovský obor} \Longrightarrow \textit{obor hlavních ideálů} \Longrightarrow \textit{gaussovský obor}$$

Základní vlastnosti těchto tříd jsou shrnuty v následující tabulce:

obory	ireducibilní rozklady	existence NSD	Bézoutova rovnost	Eukleidův algoritmus
eukleidovské	✓	✓	✓	✓
hlavních ideálů	✓	✓	✓	×
gaussovské	✓	✓	×	×
obecné	×	×	×	×

A na závěr pár příkladů, které stojí za zapamatování.

eukleidovské	tělesa, $\mathbb{Z}$, $\mathbf{T}[x]$ ($\mathbf{T}$ těleso), $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$
hlavních ideálů, ne eukleidovské	$\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$
gaussovské, ne hlavních ideálů	$\mathbb{Z}[x]$, $\mathbf{R}[x, y, \ldots]$ ($\mathbf{R}$ gaussovský)
ne gaussovské	$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$

4. Okruhové homomorfismy a faktorokruhy

4.1. **Homomorfismy.**

V celé podsekci budou $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ značit dva okruhy. Než přistoupíme k definici homomorfismu, definujme pojem ideálu obecně, i pro okruhy které nejsou nutně komutativní.

Definice. *(Oboustranným) ideálem* v okruhu $\mathbf{R}$ nazýváme každou neprázdnou podmnožinu $I \subseteq R$ takovou, že

- pokud $a, b \in I$, pak $-a \in I$ a $a + b \in I$,
- pokud $a \in I$ a $r \in R$, pak $r \cdot a \in I$ i $a \cdot r \in I$.

Okruhové homomorfismy jsou zobrazení zachovávající základní okruhové operace. Většina faktů v této sekci je přímou analogií situace, kterou jsme viděli v grupách.

Definice. Zobrazení $\varphi : R \to S$ se nazývá *homomorfismem* těchto okruhů, zapisujeme $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$, pokud pro každé $a, b \in R$ platí

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{a} \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Z Lemmatu 1.1 ihned plyne, že $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ pro všechna $a \in R$ a $\varphi(0) = 0$.

Obrazem homomorfismu nazýváme jeho obor hodnot, tj. množinu

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{b \in S : \ b = \varphi(a) \text{ pro nějaké } a \in R\}.$$

Jádro homomorfismu definujeme jako množinu

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in R : \ \varphi(a) = 0\}.$$

Následující tvrzení mimo jiné říká, že ideály hrají vzhledem k homomorfismům roli normálních podgrup.

Tvrzení 4.1 (jádro je ideál, obraz je podokruh)**.** *Buď $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ okruhy a $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$ homomorfismus. Pak*

(1) $\mathrm{Im}(\varphi)$ *tvoří podokruh okruhu* $\mathbf{S}$*;*
(2) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *tvoří ideál okruhu* $\mathbf{R}$*.*

Důkaz. Okruhový homomorfismus je zároveň grupový homomorfismus vzhledem k operacím $+, -, 0$, čili můžeme použít Tvrzení 1.2 a ihned dostaneme uzavřenost jádra a obrazu na operace $+, -, 0$. Uzavřenost obrazu na násobení se dokáže stejně jako pro sčítání. Zbývá dokončit část (2): je-li $\varphi(a) = 0$ a $r \in R$ libovolné, pak $\varphi(r \cdot a) = \varphi(r) \cdot \varphi(a) = \varphi(r) \cdot 0 = 0$ a analogicky pro součin $a \cdot r$, čili $\mathrm{Ker}(\varphi)$ tvoří ideál v $\mathbf{R}$. □

Z Tvrzení 1.3 ihned plyne jeho analogie pro okruhy.

Tvrzení 4.2. *Buď* $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ *okruhy a* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$ *homomorfismus. Pak* φ *je prostý právě tehdy, když* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Podobně jako pro grupy se dokáže také následující tvrzení (proveďte jako cvičení!).

Tvrzení 4.3. *Buď* $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$ *okruhy a* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$*,* $\psi : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ *homomorfismy. Pak*
(1) $\psi \circ \varphi$ *je homomorfismus* $\mathbf{R} \to \mathbf{T}$*,*
(2) *je-li* φ *bijektivní, pak* φ^{-1} *je homomorfismus* $\mathbf{S} \to \mathbf{R}$*.*

Příklad. Důležitou rodinou jsou tzv. *modulární homomorfismy.* V číselné variantě zvolme číslo $m > 0$ a definujme zobrazení

$$\varphi_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m, \qquad a \mapsto a \bmod m.$$

V polynomiální variantě zvolme polynom $0 \neq m \in T[x]$ a definujme zobrazení

$$\varphi_m : \mathbf{T}[x] \to \mathbf{T}[x]/(m), \qquad f \mapsto f \bmod m.$$

Není těžké ověřit, že jde o homomorfismy, jejich jádra jsou $m\mathbb{Z}$, resp. $m\mathbf{T}[x]$. Podobně bychom mohli postupovat v každém oboru, kde je definováno jednoznačné dělení se zbytkem.

Příklad. Důležitou rodinou jsou tzv. *dosazovací homomorfismy.* Uvažujme komutativní okruhy $\mathbf{R} \leq \mathbf{S}$ a prvek $a \in S$ a definujme zobrazení

$$\varphi_a : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{S}, \qquad f \mapsto f(a).$$

Není těžké ověřit, že jde o homomorfismus. Je-li $\mathbf{R} = \mathbf{S}$, jeho jádrem je hlavní ideál $(x - a)\mathbf{R}[x]$ a obrazem celé $\mathbf{R}$ (díky konstantním polynomům). Obecně může jádro a obraz vycházet všelijak, např. pro $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$, $\mathbf{S} = \mathbb{C}$, $a = i$ dostaneme jádro $(x^2 + 1)\mathbb{Z}[x]$ a obraz $\mathbb{Z}[i]$.

Příklad. Oba výše uvedené typy lze kombinovat, například zobrazení

$$\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_2, \qquad f \mapsto f(0) \bmod 2$$

je také homomorfismem, jeho jádro sestává z těch polynomů, jejichž absolutní člen je sudý, což není hlavní ideál.

4.2. **Izomorfismy.**

Bijektivní homomorfismy se nazývají *izomorfismy.* Dva okruhy nazveme *izomorfní*, pokud mezi nimi vede izomorfismus, značíme $\mathbf{R} \simeq \mathbf{S}$. Vše, co bylo v sekci 1.2 řečeno o izomorfismech grup, platí analogicky i o izomorfismech okruhů.

Na izomorfismus je možné pohlížet jako na „kopírování“: máme-li okruh $\mathbf{R}$ a bijektivní zobrazení $\varphi : R \to S$, můžeme na množinu S „překopírovat“ obě operace $* \in \{+, \cdot\}$ předpisem

$$a * b = \varphi(\varphi^{-1}(a) * \varphi^{-1}(b)).$$

Vidíme, že zobrazení φ^{-1} bude izomorfismem mezi novým okruhem $\mathbf{S}$ a starým okruhem $\mathbf{R}$. Jeden okruh je kopií druhého, došlo pouze k „přejmenování prvků“ kopírovacím zobrazením φ. Na každý izomorfismus lze pohlížet tímto způsobem.

Příklad. Je snadné nahlédnout, že množina matic

$$S = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

tvoří podokruh okruhu $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ matic 2×2 nad reálnými čísly. Zobrazení

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbf{S}, \qquad a + bi \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$$

je izomorfismem těchto okruhů, neboť je bijektivní a pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \varphi((a+bi)+(c+di)) &= \varphi((a+c)+(b+d)i) = \left(\begin{smallmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ -d & c \end{smallmatrix}\right) = \varphi(a+bi) + \varphi(c+di) \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} \varphi((a+bi)\cdot(c+di)) &= \varphi((ac-bd)+(ad+bc)i) = \left(\begin{smallmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ -d & c \end{smallmatrix}\right) = \varphi(a+bi) + \varphi(c+di). \end{aligned}$$

Tedy těleso $\mathbb{C}$ je izomorfní s maticovým okruhem $\mathbf{S}$, oba okruhy jsou „stejné“ při ztotožnění čísla $a + bi$ a odpovídající matice.

Příklad. Buď $\mathbf{R}$ libovolný okruh charakteristiky $n > 0$. Je snadné nahlédnout, že prvky tvaru $1 + \cdots + 1$ tvoří podokruh $\mathbf{P}$, tzv. *prvookruh*. Je snadné nahlédnout, že zobrazení

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbf{P}, \qquad 0 \mapsto 0, \quad k \mapsto \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k},$$

je izomorfismem těchto okruhů. Pro charakteristiku 0 platí analogické tvrzení, prvookruh je izomorfní okruhu $\mathbb{Z}$, uvažovat musíme i prvky tvaru $-(1 + \cdots + 1)$.

Důležitým příkladem izomorfismu je modulární zobrazení z důkazu čínské věty o zbytcích. Na všech prvcích se chová jako okruhový izomorfismus. Vztažený na invertibilní prvky se chová jako grupový izomorfismus.

Tvrzení 4.4 (algebraická verze čínské věty o zbytcích)**.** *Buďte $m_1, \ldots, m_n$ po dvou nesoudělná přirozená čísla a označme $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$. Zobrazení*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_M &\to \mathbb{Z}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_n} \\ a &\mapsto (a \bmod m_1, \ldots, a \bmod m_n). \end{aligned}$$

je izomorfismem těchto okruhů. Restrikce $\varphi|_{\mathbb{Z}_M^*}$ je grupovým izomorfismem

$$\mathbb{Z}_M^* \simeq \mathbb{Z}_{m_1}^* \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_n}^*.$$

Důkaz. Pohledem do důkazu čínské věty o zbytcích zjistíme, že je zobrazení φ bijektivní. Ověříme, že to je homomorfismus: pro obě operace $* \in \{+, \cdot\}$ platí

$$\begin{aligned} \varphi(a) * \varphi(b) &= (a \bmod m_1, \ldots, a \bmod m_n) * (b \bmod m_1, \ldots, b \bmod m_n) \\ &= ((a*b) \bmod m_1, \ldots, (a*b) \bmod m_n) = \varphi(a * b \bmod M), \end{aligned}$$

přičemž v poslední rovnosti využíváme faktu, že všechna m_i dělí M.

Druhou část důkazu necháváme jako cvičení: dokažte, že invertibilní prvky modulo M jsou zobrazeny na invertibilní prvky modulo jednotlivá m_i, čili $\varphi|_{\mathbb{Z}_M^*}$ je skutečně bijekcí na množinu $\mathbb{Z}_{m_1}^* \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_n}^*$. □

Analogicky bychom mohli interpretovat čínskou větu o zbytcích pro polynomy (cvičení).

4.3. **Konstrukce faktorokruhu podle ideálu.**

V zimním semestru jsme se seznámili se speciálním případem konstrukce faktorokruhu: dva polynomy jsme prohlásili za podobné, pokud dávají stejný zbytek modulo daný polynom m, a s reprezentanty zbytků jsme počítali modulo m. Tato konstrukce funguje obecněji: polynom m můžeme zaměnit za libovolný ideál I a dva prvky prohlásíme za podobné, pokud je jejich rozdíl v I. Vzhledem k tomu, že ideál tvoří normální podgrupu aditivní grupy daného okruhu, můžeme v konstrukci faktorokruhu vyžít vše, co jsme udělali pro faktorgrupy.

Definice. Buď $\mathbf{R}$ okruh a I jeho ideál. Definujeme ekvivalenci na množině R předpisem

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; a - b \in I.$$

Platí $a \sim b$ právě tehdy, když $a + I = b + I$, čili bloky jsou rozkladové třídy $[a] = a + I$. Na těchto blocích definujeme operace předpisy

$$[a] + [b] = [a + b], \qquad -[a] = [-a], \qquad [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

(v následujícím lemmatu ověříme, že je tato definice korektní). Množina bloků s výše uvedenými operacemi se nazývá *faktorokruh okruhu* $\mathbf{R}$ *podle ideálu* I,

$$\mathbf{R}/I = (\{[a] : a \in R\}, +, -, \cdot, [0]).$$

Lemma 4.5. *Buď* $\mathbf{R}$ *okruh a* I *jeho ideál.*

(1) *Výše uvedené operace na blocích jsou dobře definovány.*
(2) *Faktorokruh* $\mathbf{R}/I$ *je skutečně okruh.*

Důkaz. Z konstrukce faktorgrupy již víme, že je sčítání a odčítání dobře definované. Pro násobení předpokládejme $[a] = [c]$ a $[b] = [d]$, ověříme, že $[ab] = [cd]$. Předpokládaje $a \sim c$ a $b \sim d$, tj. $a - c \in I$ a $b - d \in I$, spočteme

$$ab - cd = a\underbrace{(b-d)}_{\in I} + \underbrace{(a-c)}_{\in I} d \in I,$$

čili $ab \sim cd$, tj. $[ab] = [cd]$. Podobně jako pro grupy se ukáže, že takto definované operace splňují všechny axiomy okruhů, včetně komutativity a existence jednotky, pokud tyto platily v původním okruhu $\mathbf{R}$ (pozor, vlastnost býti oborem integrity zachována být nemusí, viz sekce 4.4). □

Příklad. Uvažujme komutativní okruh $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$ a ideál $I = n\mathbb{Z}$. Platí

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; n \mid a - b \;\Leftrightarrow\; a \equiv b \pmod{n}.$$

Stejně jako pro grupy není problém ukázat, že $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$.

Podobně jako pro grupy platí *věta o homomorfismu* a *1. věta o izomorfismu*.

Věta 4.6 (věta o homomorfismu)**.** *Buď* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$ *homomorfismus okruhů.*

(1) *Je-li* $I \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ *ideál v* $\mathbf{R}$*, pak je zobrazení*

$$\psi : \mathbf{R}/I \to \mathbf{S}, \qquad [a] \mapsto \varphi(a)$$

dobře definované a je to okruhový homomorfismus.
(2) [1. věta o izomorfismu] $\mathbf{R}/\mathrm{Ker}(\varphi) \simeq \mathbf{Im}(\varphi)$.

Důkaz. Plyne přímo z grupové verze (Věta 2.4), pouze je třeba si uvědomit, že všechna definovaná zobrazení jsou i okruhové homomorfismy. □

Příklad. Modulární homomorfismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $a \mapsto a \bmod n$, prokazuje, že $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$.

Je-li $\mathbf{R}$ komutativní okruh a $I = mR$ jeho hlavní ideál, pak

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\; m \mid a-b \;\Leftrightarrow\; a \equiv b \pmod{m}.$$

Je-li v okruhu $\mathbf{R}$ definováno jednoznačné dělení se zbytkem (např. $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$ nebo $\mathbf{R} = \mathbf{T}[x]$, $\mathbf{T}$ těleso), prvky $\mathbf{R}/mR$ můžeme reprezentovat jako všechny možné zbytky po dělení prvkem m a operace v $\mathbf{R}/mR$ budou jako operace v původním okruhu modulo m, neboť

$$[a] \pm [b] = [a \pm b] = [a \pm b \bmod m], \qquad [a] \cdot [b] = [a \cdot b] = [a \cdot b \bmod m].$$

Speciálně, pro $\mathbf{R} = \mathbf{T}[x]$, $\mathbf{T}$ těleso, vidíme, že konstrukce faktorokruhu ve smyslu této sekce a ve smyslu zimního semestru jsou „v podstatě totožné“. 1. věta o izomorfismu použitá na modulární zobrazení $\mathbf{T}[x] \to \mathbf{T}[x]/(m)$ dává izomorfismus

$$\mathbf{T}[x]/mT[x] \simeq \mathbf{T}[x]/(m),$$

v němž polynom f stupně $< \deg m$ jednoznačně odpovídá příslušnému bloku $[f]$. Značení se zpravidla směšuje, používají se oba zápisy $\mathbf{T}[x]/mT[x]$ i $\mathbf{T}[x]/(m)$ pro obě formálně různé, nicméně izomorfní konstrukce.

Příklad. Jak vypadá faktorokruh $\mathbf{T}[x]/(x-a)$, kde $a \in T$? Uvažujme dosazovací homomorfismus

$$\mathbf{T}[x] \to \mathbf{T}, \qquad f \mapsto f(a).$$

Je to zobrazení na $\mathbf{T}$ a jeho jádro je

$$\{f \in T[x] :\; f(a) = 0\} = \{f \in T[x] :\; x-a \mid f\} = (x-a)T[x].$$

Podle 1. věty o izomorfismu je $\mathbf{T}[x]/(x-a) \simeq \mathbf{T}$.

Pro polynomy vyššího stupně je situace složitější.

Příklad. Jak vypadá faktorokruh $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$? Uvažujme homomorfismus

$$\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}(i), \qquad f \mapsto f(i).$$

Je to zobrazení na $\mathbb{Q}(i)$ a jeho jádro je

$$\begin{aligned}\{f \in \mathbb{Q}[x] :\; f(i) = 0\} &= \{f \in \mathbb{Q}[x] :\; f(i) = f(-i) = 0\}\\ &= \{f \in \mathbb{Q}[x] :\; x-i \mid f,\; x+i \mid f\}\\ &= \{f \in \mathbb{Q}[x] :\; (x-i)(x+i) = x^2+1 \mid f\}\\ &= (x^2+1)\mathbb{Q}[x].\end{aligned}$$

Podle 1. věty o izomorfismu je $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{Q}(i)$.

Příklad. Jak vypadá faktorokruh $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1)$? Uvažujme homomorfismus

$$\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \qquad f \mapsto (f(1), f(-1)).$$

Je to zobrazení na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ a jeho jádro je

$$\begin{aligned}\{f \in \mathbb{Q}[x] :\; f(1) = f(-1) = 0\} &= \{f \in \mathbb{Q}[x] :\; x-1 \mid f,\; x+1 \mid f\}\\ &= \{f \in \mathbb{Q}[x] :\; (x-1)(x+1) = x^2-1 \mid f\}\\ &= (x^2-1)\mathbb{Q}[x].\end{aligned}$$

Podle 1. věty o izomorfismu je $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Na závěr jeden příklad s ideálem, který není hlavní.

Příklad. Jak vypadá faktorokruh $\mathbb{Z}[x]/I$, kde $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : \ m \mid f(0)\}$? Dva polynomy f, g jsou ekvivalentní právě tehdy, když $f - g \in I$, tj. právě tehdy, když $m \mid f(0) - g(0)$, tj. právě tehdy, když $f(0) \equiv g(0) \pmod m$. Existuje tedy přesně m rozkladových tříd. Není těžké nahlédnout, že zobrazení

$$\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_m, \qquad f \mapsto f(0) \bmod m$$

je homomorfismem, jehož jádro je I, a tedy $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{Z}_m$.

Podobně jako pro grupy se dokáže i 2. věta o izomorfismu (cvičení!).

Tvrzení 4.7 (2. věta o izomorfismu)**.** *Buď $\mathbf{R}$ okruh a I jeho ideál.*

(1) *Je-li $I \subseteq J$ ideál v $\mathbf{R}$, pak $J/I = \{[a] : a \in J\}$ je ideál v $\mathbf{R}/I$.*
(2) *Je-li K ideál v $\mathbf{R}/I$, pak existuje ideál J v $\mathbf{R}$ takový, že $K = J/I$.*
(3) *V obou případech platí*

$$(\mathbf{R}/I)/(J/I) \simeq \mathbf{R}/J.$$

4.4. **Faktorokruhy podle maximálních ideálů a prvoideálů.**

V této části si ukážeme analogii k tvrzení, které říká, že faktorokruh $\mathbf{T}[\alpha]/(m)$ je těleso právě tehdy, když to je obor integrity, a to právě tehdy, když m je ireducibilní prvek v $\mathbf{T}[\alpha]$. Obecně je situace složitější: může se stát, že faktorokruh podle ideálu je oborem integrity, ale ne tělesem.

Definice. Ideál I okruhu $\mathbf{R}$ nazveme

- *prvoideálem*, pokud pro každé $a, b \in R$ platí, že kdykoliv $ab \in I$, pak $a \in I$ nebo $b \in I$;
- *maximální*, pokud je I maximální v uspořádané množině vlastních ideálů, tj. pokud neexistuje ideál J splňující $I \subset J \subset R$.

Příklad. Jako cvičení si dokažte:

- Ideál $n\mathbb{Z}$ v oboru $\mathbb{Z}$ je maximální právě tehdy, když to je prvoideál, což je právě tehdy, když n je prvočíslo.
- Ideál $fT[x]$ v oboru $\mathbf{T}[x]$ je maximální právě tehdy, když to je prvoideál, což je právě tehdy, když f je ireducibilní v $\mathbf{T}[x]$.

Analogické tvrzení platí v každém oboru hlavních ideálů, ale obecně jsou maximální ideály a prvoideály různé pojmy. Například ideál $I = x\mathbb{Z}[x]$ v oboru $\mathbb{Z}[x]$

- je prvoideálem, protože je polynom x prvočinitelem,
- není maximální, například ideál $\{f \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid f(0)\}$ je větší.

Věta 4.8 (faktor podle prvoideálu a maximálního ideálu)**.** *Buď $\mathbf{R}$ komutativní okruh s jednotkou a I jeho ideál. Pak*

(1) *$\mathbf{R}/I$ je obor integrity právě tehdy, když I je prvoideál;*
(2) *$\mathbf{R}/I$ je těleso právě tehdy, když I je maximální ideál.*

Důkaz. (1) Faktorokruh $\mathbf{R}/I$ je oborem integrity právě tehdy, když pro každé $a, b \in R$ platí, že kdykoliv $[ab] = [a] \cdot [b] = [0]$, pak $[a] = [0]$ nebo $[b] = 0$. Přeloženo do řeči ideálů, $ab \in I$ implikuje $a \in I$ nebo $b \in I$, což je definice prvoideálu.

(2) Podle Tvrzení 3.3 je $\mathbf{R}/I$ tělesem právě tehdy, když neobsahuje žádné vlastní ideály. 2. věta o izomorfismu říká, že jakýkoliv vlastní ideál v $\mathbf{R}/I$ je tvaru J/I, kde $I \subset J \subset R$ je ideál v $\mathbf{R}$. Čili neexistence vlastního ideálu v $\mathbf{R}/I$ je ekvivalentní tomu, že je I maximální ideál. □

Příklad. Připomeňte si příklady $\mathbb{Q}[x]/(f)$ ze sekce 4.3:

- polynom $x^2 + 1$ je ireducibilní, tedy ideál $(x^2 + 1)\mathbb{Q}[x]$ je maximální, a skutečně, $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{Q}(i)$ těleso;

- polynom $x^2 - 1$ není ireducibilní, tedy ideál $(x^2 - 1)\mathbb{Q}[x]$ není maximální (např. ideál $(x - 1)\mathbb{Q}[x]$ je větší), a skutečně, $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ není těleso.

Příklad. Vzpomeňte si na příklad s oborem $\mathbb{Z}[x]$: ideál $I = x\mathbb{Z}[x]$ je prvoideálem, který není maximální, a vskutku, faktorokruh $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{Z}$ (dosazovací homomorfismus) je oborem integrity, ale ne tělesem.

Číselná tělesa a kořeny polynomů

5. Okruhová a tělesová rozšíření

5.1. **Definice.**
V této sekci definujeme obecný pojem rozšíření a ukážeme, že jeho prvky lze vyjádřit pomocí hodnot polynomů.

Definice. Buď $\mathbf{R} \leq \mathbf{S}$ komutativní okruhy a $a_1, \ldots, a_n \in S$. Definujeme

- $\mathbf{R}[a_1, \ldots, a_n]$ jako nejmenší podokruh okruhu $\mathbf{S}$ obsahující množinu R i prvky $a_1, \ldots, a_n$; říká se mu *okruhové rozšíření* $\mathbf{S}$ *o prvky* $a_1, \ldots, a_n$.

Jsou-li $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ tělesa, pak definujeme

- $\mathbf{R}(a_1, \ldots, a_n)$ jako nejmenší podtěleso tělesa $\mathbf{S}$ obsahující množinu R i prvky $a_1, \ldots, a_n$; říká se mu *tělesové rozšíření* $\mathbf{S}$ *o prvky* $a_1, \ldots, a_n$.

Příklad (Gaussova čísla)**.** Gaussova celá čísla lze zapsat jako obor $\mathbb{Z}[i]$: jde o nejmenší podobor tělesa $\mathbb{C}$ obsahující jak celá čísla, tak číslo i. Analogicky, Gaussova racionální čísla lze zapsat jako $\mathbb{Q}[i]$: jde o nejmenší podobor tělesa $\mathbb{C}$ obsahující jak racionální čísla, tak číslo i. Obor $\mathbb{Q}[i]$ je tělesem, protože

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \in \mathbb{Q}[i],$$

čili platí $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$. Pro reálná čísla pak platí $\mathbb{R}[i] = \mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$.

Gaussova čísla lze přirozeně zobecnit dvěma způsoby: místo $i = \sqrt{-1}$ budeme přidávat druhé odmocniny z jiných čísel, anebo vyšší komplexní odmocniny z jedné.

Příklad (kvadratická rozšíření)**.** Pro libovolné celé číslo s uvažujme *kvadratické rozšíření*

$$\mathbb{Z}[\sqrt{s}] = \{a + b\sqrt{s} : \ a, b \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{C},$$
$$\mathbb{Q}[\sqrt{s}] = \mathbb{Q}(\sqrt{s}) = \{a + b\sqrt{s} : a, b \in \mathbb{Q}\} \leq \mathbb{C}.$$

Není těžké nahlédnout, že množina na pravé straně je skutečně podoborem, resp. podtělesem, tělesa $\mathbb{C}$.

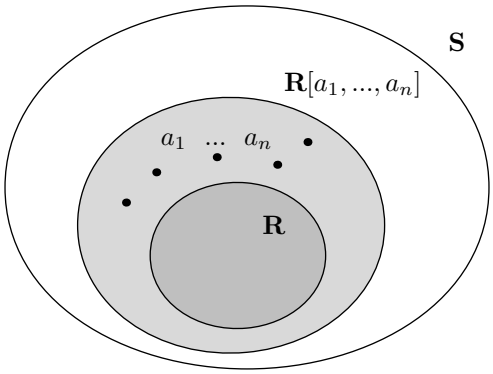
Příklad (cyklotomická rozšíření)**.** Pro $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ (tzv. primitivní n-tá odmocnina z jedné) uvažujme *n-té cyklotomické rozšíření*

$$\mathbb{Z}[\zeta_n] = \{a_0 + a_1\zeta_n + a_2\zeta_n^2 + \ldots + a_{n-1}\zeta_n^{n-1} : \ a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{C},$$
$$\mathbb{Q}[\zeta_n] = \mathbb{Q}(\zeta_n) = \{a_0 + a_1\zeta_n + a_2\zeta_n^2 + \ldots + a_{n-1}\zeta_n^{n-1} : \ a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}\} \leq \mathbb{C}.$$

Pro $n = 3$ dostáváme Eisensteinova čísla, pro $n = 4$ Gaussova čísla. Vyjádření na pravé straně není jednoznačné, například pro $n = 3$ je $\zeta_3^2 = -1 - \zeta_3$. Důkaz, že $\mathbb{Q}[\zeta_n] = \mathbb{Q}(\zeta_n)$, není zdaleka tak jednoduchý jako pro kvadratická rozšíření. Později si ukážeme obecné Tvrzení 6.4, z něhož tento fakt ihned plyne.

Příklad. Můžeme uvažovat i rozšíření o více prvků, například

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$



Obrázek 6. Rozšíření $\mathbf{R}[a_1, \ldots, a_n] \leq \mathbf{S}$.

Tvrzení 5.1 (struktura okruhových rozšíření)**.** *Buď* $\mathbf{R} \leq \mathbf{S}$ *komutativní okruhy s jednotkou a* $a \in S$*. Pak*

$$\begin{aligned}\mathbf{R}[a] &= \{f(a) : \ f \in R[x]\} \\ &= \{u_0 + u_1 a + \ldots + u_n a^n : \ n \in \mathbb{N}, \ u_0, \ldots, u_n \in R\}.\end{aligned}$$

Jsou-li $\mathbf{R} \leq \mathbf{S}$ *tělesa, pak*

$$\mathbf{R}(a) = \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} : \ f, g \in R[x], \ g(a) \neq 0 \right\}.$$

Důkaz. Označme $M = \{f(a) : \ f \in R[x]\}$. Je potřeba dokázat, že množina M

(1) tvoří podokruh okruhu $\mathbf{S}$,
(2) obsahuje $R \cup \{a\}$,
(3) je nejmenší podmnožinou okruhu $\mathbf{S}$ splňující tyto podmínky.

(1) Mějme dva prvky $f(a), g(a) \in M$, kde $f, g \in R[x]$. Jejich součet $f(a)+g(a) = (f+g)(a)$ je také v M, protože $f + g \in R[x]$, a analogický argument lze použít pro součin i prvek $-f(a)$. Volbou $f = 0$ dostaneme $0 \in M$.

(2) Volbou konstantních polynomů dostaneme $R \subseteq M$. Volbou $f = x$ dostaneme $a \in M$.

(3) Uvažujme libovolný podokruh $\mathbf{U}$ obsahující $R \cup \{a\}$. Tento podokruh musí obsahovat všechny mocniny a^i, jejich libovolné násobky prvky z R, a také součty těchto násobků. Čili musí obsahovat všechny prvky tvaru $u_0 + u_1 a + \ldots + u_n a^n$, kde $u_0, \ldots, u_n \in R$, a tedy $M \subseteq U$.

Vyjádření tělesových rozšíření se dokáže analogicky, navíc musíme dát pozor na inverzní prvky (cvičení!). □

Příklad. Uvažujme kvadratická rozšíření $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$. Vzhledem k tomu, že $\sqrt{s}^2 = s$, $\sqrt{s}^3 = s\sqrt{s}$, atd., hodnota libovolného polynomu $f \in \mathbb{Z}[x]$ na prvku $\sqrt{s}$ bude rovna číslu tvaru $a+b\sqrt{s}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Čili $\mathbb{Z}[\sqrt{s}] = \{f(\sqrt{s}) : f \in \mathbb{Z}[x]\} = \{a+b\sqrt{s} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Analogicky, pro cyklotomická rozšíření dostaneme vyjádření $\mathbb{Z}[\zeta_n] = \{a_0 + a_1\zeta_n + \ldots + a_{n-1}\zeta_n^{n-1} : \ a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}\}$, protože $\zeta_n^n = 1$, $\zeta_n^{n+1} = \zeta_n$ atd.

Pro každé těleso $\mathbf{T}$ platí $\mathbf{T}[a] \leq \mathbf{T}(a)$, protože v okruhu $\mathbf{T}(a)$ navíc požadujeme přítomnost inverzních prvků. Za jakých podmínek platí $\mathbf{T}[a] = \mathbf{T}(a)$? V sekci 6 si ukážeme, že to nastane právě tehdy, když je a tzv. *algebraický prvek*, tedy když je kořenem nějakého nenulového polynomu z $\mathbf{T}[x]$. Jednu implikaci si můžeme dokázat hned.

Tvrzení 5.2. *Buď* $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ *tělesa a* $a \in S$ *prvek, který není kořenem žádného nenulového polynomu z* $\mathbf{T}[x]$*. Pak* $\mathbf{T}[a] \neq \mathbf{T}(a)$.

Důkaz. Podle Tvrzení 5.1 je $\mathbf{T}[a] = \{f(a) : \ f \in T[x]\}$. Kdyby se v této množině nacházel prvek a^{-1}, pak by existoval polynom $f \in T[x]$ takový, že $f(a) = a^{-1}$, čili $af(a) = 1$, a tedy a by bylo kořenem nenulového polynomu $xf - 1 \in T[x]$, spor. □

5.2. **Tělesové rozšíření jako vektorový prostor.**

Hlavním tématem této kapitoly je studium tzv. *stupně rozšíření*, tj. dimenze většího tělesa jakožto vektorového prostoru nad svým podtělesem. V jakém smyslu, dimenze?

Rozšířením těles budeme rozumět dvojici komutativních těles $\mathbf{T}, \mathbf{S}$ takovou, že $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$. Říkáme, že $\mathbf{T}$ je podtělesem $\mathbf{S}$, nebo že $\mathbf{S}$ je rozšířením $\mathbf{T}$.

Klíčem k pochopení celé kapitoly je myšlenka, že těleso $\mathbf{S}$ lze považovat za vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$: sčítání a odčítání ponecháme a místo násobení jakožto operace $S \times S \to S$ uvažujeme pouze restrikci $T \times S \to S$. Neformálně, prvky většího tělesa $\mathbf{S}$ považujeme za vektory, prvky menšího tělesa $\mathbf{T}$ za skaláry a uvažujeme pouze násobení skalár krát vektor. Tento vektorový prostor budeme značit $\mathbf{S_T}$.

Uvědomte si, že jde skutečně o vektorový prostor: aditivní struktura $(S, +, -, 0)$ je abelovskou grupou a pro všechna $a, b \in T$ (skaláry), $v, w \in S$ (vektory) platí každý z axiomů vektorových prostorů: $a(bv) = (ab)v$ plyne z asociativity násobení, $1v = v$ z vlastnosti jednotky a $a(v+w) = av+aw$ a $(a+b)v = av+bv$ z distributivity.

Definice. Dimenze vektorového prostoru $\mathbf{S_T}$ se nazývá *stupeň rozšíření* a značí se

$$[\mathbf{S} : \mathbf{T}] = \dim \mathbf{S_T}.$$

Je-li stupeň $[\mathbf{S} : \mathbf{T}]$ konečný, říkáme, že jde o rozšíření *konečného stupně*.

Příklady.

- $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. Každé komplexní číslo lze zapsat právě jedním způsobem jako $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, čili prvky $1, i$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{C}_\mathbb{R}$.
- Analogicky, pro s, které není čtvercem, je stupeň $[\mathbb{Q}(\sqrt{s}) : \mathbb{Q}] = 2$, prvky $1, \sqrt{s}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{Q}(\sqrt{s})_\mathbb{Q}$.
- $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$, bázi prostoru $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})_\mathbb{Q}$ tvoří například prvky $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$.
- Pozor, pro $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$ je stupeň $[\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}] = 2$ a nikoliv 3: prvky $1, \zeta_3, \zeta_3^2$ jsou lineárně závislé, protože $\zeta_3^2 = -1 - \zeta_3$.
- Je-li u transcendentní číslo (např. konstanty e nebo π), stupeň $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$ je nekonečný (spočetný): lineárně nezávislou množinu tvoří třeba prvky $1, u, u^2, \ldots$ (viz Věta 6.6).
- Stupeň $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ je dokonce nespočetný: prostory spočetné dimenze nad spočetným tělesem jsou spočetné, zatímco reálných čísel je nespočetně.

Časem se nám bude hodit pojem prvookruhu a prvotělesa. Pro libovolný okruh $\mathbf{R}$ s jednotkou uvažujme zobrazení

$$\mathbb{Z} \to \mathbf{R}, \qquad n \mapsto \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}.$$

Je vidět, že jde o homomorfismus, jehož obrazem je tzv. *prvookruh* okruhu $\mathbf{R}$ a jehož jádrem je ideál $n\mathbb{Z}$, kde n je *charakteristika* okruhu $\mathbf{R}$. Použitím 1. věty o izomorfismu dostáváme, že prvookruh libovolného okruhu je izomorfní buď okruhu $\mathbb{Z}$ v případě charakteristiky 0, nebo okruhu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ v případě charakteristiky n.

Nyní uvažujme těleso $\mathbf{T}$. Jeho *prvotělesem* se rozumí nejmenší podtěleso. To v sobě jistě obsahuje prvookruh, ale navíc musí ke každému nenulovému prvku obsahovat jeho inverz. Charakteristika tělesa je 0 nebo prvočíslo p. V druhém případě je prvookruh již tělesem (izomorfním $\mathbb{Z}_p$), čili pojmy splývají. V případě charakteristiky 0 prvotěleso sestává ze všech zlomků ab^{-1}, kde a, b jsou prvky prvookruhu, čili je izomorfní tělesu $\mathbb{Q}$.

Každé těleso je samozřejmě rozšířením svého prvotělesa. Speciálně, pro konečná tělesa dostáváme velmi zajímavý důsledek vektorového pohledu na tělesová rozšíření.

Tvrzení 5.3. *Počet prvků konečného tělesa je mocnina prvočísla.*

Důkaz. Konečné těleso $\mathbf{T}$ charakteristiky p je rozšířením svého prvotělesa $\mathbf{P} \simeq \mathbb{Z}_p$. Čili vektorový prostor $\mathbf{T_P}$ je izomorfní prostoru $(\mathbb{Z}_p)^k$, kde $k = [\mathbf{T} : \mathbf{P}]$, čili má p^k prvků. □

6. Algebraické prvky a rozšíření konečného stupně

6.1. Algebraická a transcendentní čísla.

Jedním z hlavních problémů matematiky 18. a 19. století byly následující dvě otázky:

- Je dán polynom. Jak najít jeho kořeny? Lze je vyjádřit vzorci, které by používaly základní aritmetické operace na koeficientech?
- Je dáno číslo (reálné či komplexní). Existuje celočíselný polynom, jehož je toto číslo kořenem? Jak jej najít?

Odpověď na první otázku dává *Galoisova věta*, která charakterizuje polynomy, jejichž kořeny lze vyjádřit vzorci. Pro polynomy stupně ≤ 4 existují tzv. *Cardanovy vzorce*, ale pro některé polynomy stupně ≥ 5 žádné vzorce neexistují a v praxi se kořeny hledají pouze přibližně, pomocí numerických metod. V této podsekci se podíváme podrobněji na druhou otázku.

Definice. Komplexní číslo a se nazývá *algebraické*, pokud existuje nenulový celočíselný polynom f takový, že $f(a) = 0$. V opačném případě se a nazývá *transcendentní*.

Příklad. Spousta čísel „ze života“ je algebraických.

- Racionální čísla jsou algebraická, racionální číslo $\frac{a}{b}$ je kořenem polynomu $bx - a$.
- Odmocniny jsou algebraické, například $\sqrt[n]{s}$ je kořenem polynomu $x^n - s$.
- Leckterá iracionální čísla jsou algebraická, i když to není na první pohled vidět. Například $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, příslušným polynomem je $x^4 - 10x^2 + 1$.
- Pomocí teorie tělesových rozšíření si později dokážeme, že součet, rozdíl, součin a podíl algebraických čísel je algebraické číslo (Věta 6.10).

Příklad. Již Leonhard Euler zřejmě předpokládal, že ne každé číslo je algebraické, ale první prokazatelně transcendetní číslo bylo předvedeno mnohem později.

- V roce 1840 dokázal Joseph Liouville, že iracionální algebraická čísla nelze, v jistém smyslu, dobře aproximovat racionálními čísly. Z toho důvodu nemůže být algebraické například číslo $\sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!}$ (tj. číslo, které má v desetinném rozvoji jedničku právě na pozicích tvaru $i!$, jinak nuly).
- V roce 1873 dokázal Charles Hermite, že číslo e je transcendentní, a až v roce 1882 našel Ferdinand von Lindemann důkaz transcendence čísla π.
- O to více udivil matematiky v roce 1874 Georg Cantor, když dokázal, že *skoro všechna reálná čísla jsou transcendentní* (ve smyslu pravděpodobnosti dané rovnoměrným rozdělením, tj. náhodné reálné číslo je s pravděpodobností 1 transcendentní).

Každý ze známých důkazů transcendence konkrétních čísel je poměrně komplikovaný. Nikoliv však argument Cantorův: poměrně jednoduchým způsobem dokázal, že existuje spousta transcedentních čísel, aniž by musel nějaké nalézt. Jeho argument je založen na počítání: transcedentních čísel je mnohem víc (nespočetně) než těch algebraických (těch je jen spočetně). Cantorův důkaz, který byl jednou z hlavních motivací vzniku teorie množin, nyní ukážeme.

Připomeňme, že nekonečná množina se nazývá *spočetná*, pokud lze její prvky seřadit do posloupnosti indexované přirozenými čísly (tj. jde o množinu stejně velkou jako $\mathbb{N}$). Všechny ostatní (tj. větší) nekonečné množiny nazýváme *nespočetné*.

Nejprve s všimněte, že sjednocení dvou spočetných množin je spočetné: je-li $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, pak $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$.

Tedy množina $\mathbb{Z}$ je spočetná (sjednocení kladných a záporných čísel). Dokonce i množina $\mathbb{Q}$ je spočetná: seřaďte kladná racionální čísla do posloupnosti podle součtu čitatele a jmenovatele (ty se stejným součtem seřaďte libovolně), proveďte to samé pro záporná, vezměte sjednocení a přidejte na začátek nulu.

Tvrzení 6.1. *Množina algebraických čísel je spočetná.*

Důkaz. Definujme *index polynomu* $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \neq 0$ jako součet $|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| + n$. Všimněte si, že existuje jen konečně mnoho celočíselných polynomů daného indexu (např. index 1: $f = \pm 1$; index 2: $f = \pm 2$, $f = \pm x$; index 3: $f = \pm 3$, $f = \pm 2x$, $f = \pm x \pm 1$, $f = \pm x^2$), čili všechny polynomy lze seřadit do posloupnosti podle vzrůstajícího indexu. Přitom každý nenulový polynom má jen konečně mnoho kořenů, tedy nahrazením polynomu za jeho kořeny získáme posloupnost obsahující všechna algebraická čísla. □

Tvrzení 6.2. *Množina reálných čísel je nespočetná.*

Důkaz. Kdyby byla množina reálných čísel spočetná, byl by jistě spočetný i interval $[0, 1)$, a tudíž bychom mohli seřadit čísla z tohoto intervalu do posloupnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ a_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ a_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Nyní definujme číslo $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ tak, že $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, atd. Toto číslo nemůže být na seznamu, neboť se od i-tého prvku liší v i-té pozici rozvoje. Což je spor s tím, že tam měla být všechna čísla z intervalu $[0, 1)$. (K tomu, aby byl tento argument korektní, je třeba se vyhnout rozvojům končícím samými devítkami.) □

Každé reálné číslo je algebraické nebo transcendentní. Těch prvních je jen spočetně, čili těch druhých musí být nespočetně. Tedy, nejen že musí transcendentní čísla existovat, ale je jich *mnohem* více, než těch racionálních.

V dalším textu dáme do souvislosti algebraičnost daného čísla se stupněm jistého tělesového rozšíření a také si řekneme, jak pro algebraická čísla hledat polynomy, jichž jsou kořenem.

6.2. **Minimální polynom a stupeň jednoduchého rozšíření.**

V této sekci uvedeme do souvislosti pojem algebraického čísla s vlastnostmi tzv. *jednoduchých rozšíření*, tj. rozšíření tvaru $\mathbf{T}(a)$, určených jedním prvkem. Hlavním cílem této sekce je vybudovat teorii, jejímž důsledkem je následující charakterizace: číslo a je algebraické právě tehdy, když je stupeň $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ konečný, přičemž tento stupeň je pak roven stupni libovolného ireducibilního polynomu, jehož je a kořenem.

Začneme obecnější definicí algebraičnosti, nad libovolným tělesem.

Definice. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$. Řekneme, že prvek a je *algebraický* nad $\mathbf{T}$, pokud existuje nenulový polynom z $\mathbf{T}[x]$, jehož je a kořenem. V opačném případě se prvek a nazývá *transcendentní* nad $\mathbf{T}$.

Uvědomte si, že číslo je algebraické ve smyslu sekce 6.1 právě tehdy, když je algebraickým prvkem nad tělesem $\mathbb{Q}$: dané číslo je kořenem nějakého racionálního polynomu právě tehdy, když je kořenem nějakého celočíselného polynomu, stačí přenásobit koeficienty.

Definice. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický nad $\mathbf{T}$. *Minimálním polynomem* prvku a nad $\mathbf{T}$ rozumíme ireducibilní monický polynom $m_{a,\mathbf{T}}$ z $\mathbf{T}[x]$, jehož je a kořenem.

Tvrzení 6.3 (vlastnosti minimálních polynomů)**.** *Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický nad $\mathbf{T}$. Pak*

(1) *minimální polynom $m_{a,\mathbf{T}}$ existuje a je jednoznačně určený;*
(2) *prvek a je kořenem polynomu $f \in T[x]$ právě tehdy, když $m_{a,\mathbf{T}} \mid f$.*

Důkaz. Množina $I = \{f \in T[x] : \ f(a) = 0\}$ tvoří ideál v oboru $\mathbf{T}[x]$, a protože je $\mathbf{T}[x]$ oborem hlavních ideálů (Věta 3.2), existuje monický polynom $m \in T[x]$ takový, že $I = mT[x]$. Vidíme, že $f(a) = 0$ právě tehdy, když $m \mid f$. Kdyby polynom m nebyl ireducibilní v $\mathbf{T}[x]$, tj. kdyby $m = fg$, kde $f, g \nmid m$, pak $0 = m(a) = f(a)g(a)$, čili prvek a by byl kořenem alespoň jednoho z polynomů f, g, ale $m \nmid f, g$, spor. Čili m je minimální polynom prvku a nad $\mathbf{T}$. Pro jakýkoliv jiný monický ireducibilní polynom $\tilde{m} \in T[x]$, jehož je a kořenem, platí $m \mid \tilde{m}$ a z ireducibility a moničnosti dostáváme $\tilde{m} = m$. □

Příklad. Je ihned vidět, že

$$m_{1,\mathbb{Q}} = x - 1, \quad m_{i,\mathbb{Q}} = x^2 + 1, \quad m_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}} = x^3 - 2,$$

neboť jde o ireducibilní polynomy, které mají daný prvek za kořen.

Příklad. Pozor, pro $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$ minimální polynom $m_{\zeta_3,\mathbb{Q}}$ není $x^3 - 1$, neboť tento polynom není ireducibilní. Platí $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, ζ_3 je kořenem druhého činitele, ten je ireducibilní, a tedy $m_{\zeta_3,\mathbb{Q}} = x^2 + x + 1$.

Příklad. Spočteme minimální polynom prvku $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Platí

$$a^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad a^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}, \quad a^4 = 49 + 20\sqrt{6}$$

a vidíme, že $a^4 = 10a^2 - 1$. Čili a je kořenem polynomu $x^4 - 10x^2 + 1$. Tento polynom je ireducibilní: díky kritériu existence racionálního kořene vidíme, že nemá racionální kořen, a na součin dvou polynomů stupňů 2 se rozkládat nemůže, neboť $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ není řešením žádné kvadratické rovnice.

Tvrzení 6.4 (struktura jednoduchých rozšíření)**.** *Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický prvek nad $\mathbf{T}$. Pak*

$$\mathbf{T}(a) = \mathbf{T}[a].$$

Důkaz. Podle Tvrzení 5.1 je

$$T[a] = \{f(a) : \ f \in T[x]\}.$$

Dokážeme, že tyto prvky tvoří podtěleso. Mějme tedy nějaký prvek $0 \neq f(a) \in T[a]$, hledáme jeho inverz, tedy polynom $g \in T[x]$ takový, že $f(a)g(a) = 1$. Protože $f(a) \neq 0$, polynom $m_{a,\mathbf{T}}$ nedělí f. Z ireducibility $m_{a,\mathbf{T}}$ plyne $\mathrm{NSD}(m_{a,\mathbf{T}}, f) = 1$, čili podle Bézoutovy rovnosti existují polynomy $u, g \in T[x]$ takové, že $1 = um_{a,\mathbf{T}} + gf$. Dosazením prvku a dostáváme

$$1 = u(a)m_{a,\mathbf{T}}(a) + g(a)f(a) = u(a) \cdot 0 + g(a)f(a) = f(a)g(a),$$

čili $g(a)$ je inverzní prvek k $f(a)$. □

Alternativní důkaz. Uvažujme homomorfismus $\varphi : \mathbf{T}[x] \to \mathbf{T}[a]$, $f \mapsto f(a)$. Ten je zřejmě na, jeho jádro je ideál $m_{a,\mathbf{T}}T[x]$, a tak podle 1. věty o izomorfismu $\mathbf{T}[x]/(m_{a,\mathbf{T}}) \simeq \mathbf{T}[a]$. Protože je $m_{a,\mathbf{T}}$ ireducibilní, tento ideál je maximální a tudíž je $\mathbf{T}[a]$ těleso, čili $\mathbf{T}[a] = \mathbf{T}(a)$. □

Příklad. Číslo $\sqrt{s}$, $s \in \mathbb{Z}$, je algebraické nad $\mathbb{Q}$, tedy $\mathbb{Q}(\sqrt{s}) = \mathbb{Q}[\sqrt{s}]$. A skutečně,

$$(a + b\sqrt{s})^{-1} = \frac{a}{a^2 - b^2 s} - \frac{b}{a^2 - b^2 s}\sqrt{s} \in \mathbb{Q}[\sqrt{s}].$$

Pro rozšíření vyšších stupňů vycházejí vzorce ošklivě (zkuste si to!) a Tvrzení 6.4 má svoji cenu.

Poznámka. Je-li a transcendentní prvek nad $\mathbf{T}$, pak $\mathbf{T}[a] \neq \mathbf{T}(a)$. Kdyby $\frac{1}{a} \in \mathbf{T}[a]$, pak by existoval polynom $f \in \mathbf{T}[x]$ takový, že $f(a) = a^{-1}$, čili $af(a) = 1$, a tedy a by bylo kořenem polynomu $xf - 1 \in T[x]$, spor.

Tvrzení 6.5 (stupeň jednoduchých rozšíření)**.** *Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$ algebraický prvek nad $\mathbf{T}$. Pak*

$$[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}] = \deg m_{a,\mathbf{T}}.$$

Důkaz. Označme $n = \deg m_{a,\mathbf{T}}$. Dokážeme, že prvky $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{T}(a)_{\mathbf{T}}$, a tedy že jeho dimenze je n.

Kdyby byly prvky $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ lineárně závislé, pak by platilo $\sum_{i=0}^{n-1} t_i a^i = 0$ pro nějaká $t_i \in T$, z nichž by aspoň jedno bylo nenulové. Prvek a by tedy byl kořenem (nenulového) polynomu $\sum_{i=0}^{n-1} t_i x^i \in T[x]$ s menším stupněm než $m_{a,\mathbf{T}}$, což by byl spor s minimalitou.

Nyní dokážeme, že prvky $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ generují vektorový prostor $\mathbf{T}(a)_{\mathbf{T}}$. Uvažujme prvek $f(a)$ tělesa $\mathbf{T}(a) = \mathbf{T}[a]$, vyjádříme jej jako lineární kombinaci. Buď $q, r \in T[x]$ takové, že $f = q \cdot m_{a,\mathbf{T}} + r$ a $\deg r < \deg m_{a,\mathbf{T}} = n$. Pak

$$f(a) = q(a) \cdot m_{a,\mathbf{T}}(a) + r(a) = q(a) \cdot 0 + r(a) = r(a),$$

a protože je stupeň r menší než n, máme $f(a) = r(a) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i a^i$, kde $t_i \in T$ jsou koeficienty polynomu r. □

Příklad. Pomocí Tvrzení 6.5 lze určit stupeň jednoduchého rozšíření.

- $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = [\mathbb{R}(i) : \mathbb{R}] = \deg m_{i,\mathbb{R}} = \deg(x^2 + 1) = 2$.
- $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p}) : \mathbb{Q}] = \deg(x^n - p) = n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a prvočíslo p, protože uvedený polynom je podle Eisensteinova kritéria ireducibilní. (Pokud p není prvočíslo, situace je složitější.)
- $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ (hodnota Eulerovy funkce), což ale není snadné dokázat, používá se k tomu teorie cyklotomických polynomů. Je-li n prvočíslo, minimálním polynomem je $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, jehož ireducibilitu lze po substituci ukázat z Eisensteinova kritéria.

Důsledek 6.6. *Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$. Prvek a je algebraický nad $\mathbf{T}$ právě tehdy, když je stupeň $[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}]$ konečný.*

Důkaz. Je-li a transcendentní, pak $1, a, a^2, \ldots$ tvoří nekonečnou lineárně nezávislou množinu: kdyby $\sum_{i=0}^{n} t_i a^i = 0$ pro nějaké koeficienty $t_i \in T$, aspoň jeden nenulový, bylo by a kořenem nenulového polynomu $\sum_{i=0}^{n} t_i x^i$ z $\mathbf{T}[x]$, spor. Opačná implikace plyne z Tvrzení 6.5. □

Příklad. Ukážeme si strukturu tzv. *kvadratických rozšíření*, tj. rozšíření stupně 2. Dokážeme, že je-li $\mathbf{T} < \mathbf{S} \leq \mathbb{C}$ a $[\mathbf{S} : \mathbf{T}] = 2$, pak

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}(\sqrt{s}) \text{ pro nějaké } s \in T.$$

Buď $1, a$ báze prostoru $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}$. Pak $\mathbf{S} = \mathbf{T}(a)$ a podle Tvrzení 6.5 je a kořenem nějakého polynomu z $\mathbf{T}[x]$ stupně 2. Známý vzorec na výpočet kořenů kvadratického polynomu říká, že $a = u + v\sqrt{s}$ pro nějaká $u, v, s \in T$, a tak $\mathbf{S} = \mathbf{T}(u + v\sqrt{s}) = \mathbf{T}(\sqrt{s})$.

6.3. **Vícenásobná rozšíření.**

K výpočtu stupně vícenásobného rozšíření slouží následující obecné pravidlo.

Tvrzení 6.7 (stupeň vícenásobných rozšíření)**.** *Buď* $\mathbf{T} \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{U}$ *rozšíření těles. Pak*

$$[\mathbf{U} : \mathbf{T}] = [\mathbf{U} : \mathbf{S}] \cdot [\mathbf{S} : \mathbf{T}].$$

Důkaz. Zvolme bázi A vektorového prostoru $\mathbf{S_T}$ a bázi B vektorového prostoru $\mathbf{U_S}$. Dokážeme, že

$$C = \{ab : \ a \in A, \ b \in B\}$$

je bází vektorového prostoru $\mathbf{U_T}$.

Nejprve dokážeme, že C generuje prostor $\mathbf{U_T}$ (jistě $C \subseteq U$, a tedy C generuje podprostor $\mathbf{U_T}$). Je-li $u \in U$, pak $u = \sum_j s_j b_j$ pro nějaká $s_j \in S$ a $b_j \in B$. Každé s_j lze napsat jako $s_j = \sum_i t_{ij} a_i$ pro nějaká $t_{ij} \in T$ a $a_i \in A$, a dosazením druhé rovnosti do první dostaneme

$$u = \sum_j \big(\sum_i t_{ij} a_i \big) b_j = \sum_{i,j} t_{ij} \cdot a_i b_j.$$

Tedy u je lineární kombinací prvků C s koeficienty z tělesa $\mathbf{T}$.

Nyní dokážeme lineární nezávislost. Předpokládejme, že $\sum_{i,j} t_{ij} \cdot a_i b_j = 0$ pro nějaká $t_{ij} \in T$ a $a_i b_j \in C$. Rozepíšeme

$$0 = \sum_{i,j} t_{ij} a_i b_j = \sum_j \underbrace{\big(\sum_i t_{ij} a_i \big)}_{\in S} b_j.$$

Lineární nezávislost prvků b_j nad tělesem $\mathbf{S}$ nám dává $\sum_i t_{ij} a_i = 0$ pro každé j a z lineární nezávislosti prvků a_i nad tělesem $\mathbf{T}$ dostáváme $t_{ij} = 0$ pro všechna i, j.

Z lineární nezávislosti také plyne, že prvky ab, $a \in A$, $b \in B$, jsou po dvou různé, a tedy

$$[\mathbf{U} : \mathbf{T}] = |C| = |A \times B| = |A| \cdot |B| = [\mathbf{S} : \mathbf{T}] \cdot [\mathbf{U} : \mathbf{S}].$$

□

Tvrzení 6.5 a 6.7 můžeme aplikovat na výpočet stupně vícenásobných rozšíření typu $\mathbf{T}(a_1, a_2, \dots)$. Dvojité rozšíření $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}(a, b)$ můžeme rozbít na dvě jednoduchá rozšíření $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}(a) \leq \mathbf{T}(a, b)$ a spočteme

$$\begin{aligned}[\mathbf{T}(a,b) : \mathbf{T}] = [\mathbf{T}(a,b) : \mathbf{T}(a)] \cdot [\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}] &= \deg m_{b,\mathbf{T}(a)} \cdot \deg m_{a,\mathbf{T}} \\ &\leq \deg m_{b,\mathbf{T}} \cdot \deg m_{a,\mathbf{T}}.\end{aligned}$$

Pozor, při vyjádření stupně $[\mathbf{T}(a, b) : \mathbf{T}(a)]$ musíme použít minimální polynom prvku b nad tělesem $\mathbf{T}(a)$, který může být menšího stupně, než minimální polynom nad tělesem $\mathbf{T}$. Vícenásobným použitím popsaného postupu snadno dokážeme následující důsledek.

Důsledek 6.8. *Buď* $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ *rozšíření těles a* $a_1, \dots, a_n \in S$ *prvky algebraické nad* $\mathbf{T}$*. Pak* $\mathbf{T}(a_1, \dots, a_n)$ *je rozšířením konečného stupně nad* $\mathbf{T}$*.*

Příklad. Pomocí výpočtu dimenze předvedeme, že

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Zřejmě $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Pokud tedy dokážeme, že oba prostory mají stejnou dimenzi, musí být totožné. Spočteme minimální polynomy:

- $m_{\sqrt{2}+\sqrt{3},\mathbb{Q}} = x^4 - 10x^2 + 1$;
- $m_{\sqrt{2},\mathbb{Q}} = x^2 - 2$;
- $m_{\sqrt{3},\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = x^2 - 3$ (ověřte, že je opravdu ireducibilní v $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$!).

Podle Tvrzení 6.5 a 6.7 dostáváme $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ a $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$.

Je-li $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a každý prvek tělesa $\mathbf{S}$ je algebraický nad $\mathbf{T}$, hovoříme o *algebraickém rozšíření*. Tuto vlastnost mají všechna rozšíření konečného stupně.

Tvrzení 6.9. *Rozšíření konečného stupně jsou algebraická.*

Důkaz. Označme $n = [\mathbf{S} : \mathbf{T}]$. Pro libovolný prvek $a \in S$ dokážeme, že je algebraický nad $\mathbf{T}$. Prvky $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n$ jsou lineárně závislé, protože jich je více než je dimenze vektorového prostoru $\mathbf{S}_\mathbf{T}$. Tedy existují koeficienty $t_i \in T$, aspoň jeden z nich nenulový, kterými lze lineárně nakombinovat nulu, tj. $\sum_{i=0}^{n} t_i a^i = 0$. Čili prvek a je kořenem nenulového polynomu $\sum_{i=0}^{n} t_i x^i \in T[x]$. □

Tvrzení 6.9 je principem nekonstruktivních důkazů algebraičnosti: k důkazu, že je prvek a algebraický nad $\mathbf{T}$, stačí najít rozšíření $\mathbf{S} \geq \mathbf{T}$ konečného stupně, v němž a leží. Typickým příkladem je důkaz, že součet, rozdíl, součin a podíl algebraických prvků je algebraický prvek, jak říká následující věta.

Věta 6.10 (algebraické prvky tvoří podtěleso)**.** *Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles. Prvky $\mathbf{S}$, které jsou algebraické nad $\mathbf{T}$, tvoří podtěleso tělesa $\mathbf{S}$.*

Důkaz. Uvažujme prvky $a, b \in S$ algebraické nad $\mathbf{T}$. Rozšíření $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}(a,b)$ je konečného stupně (Důsledek 6.8), a tedy algebraické (Tvrzení 6.9). Čili všechny prvky $\mathbf{T}(a,b)$ jsou algebraické nad $\mathbf{T}$, speciálně také prvky $a+b$, $a \cdot b$, $-a$ i a^{-1} (pro $a \neq 0$). Tedy algebraické prvky tvoří podtěleso tělesa $\mathbf{S}$. □

7. Neřešitelnost úloh pravítkem a kružítkem

Mezi klasické matematické úlohy s kořeny v antickém Řecku patří konstrukce pomocí pravítka a kružítka. Některé úlohy jsou snadné a učí se na základní škole: například zdvojení čtverce či půlení úhlu. Jsou úlohy, které odolávaly tisíciletí: například konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníka objevil Gauss roku 1796. Už v té době se tušilo, že některé úlohy zřejmě řešit nepůjdou, ale byl to až rozvoj algebry počátkem 19. století, který to umožnil dokázat. Mezi nejznámější takové úlohy patří:

- *zdvojení krychle*: k dané úsečce sestrojit úsečku, která je $\sqrt[3]{2}$-krát delší (původní formulace: k dané úsečce u sestrojit úsečku v takovou, že krychle s hranou v má dvakrát větší objem, než krychle s hranou u);
- *trisekce úhlu*: k danému úhlu sestrojit třetinový úhel;
- *rektifikace kružnice* a *kvadratura kruhu*: k dané úsečce sestrojit sestrojit úsečku, která je π-krát delší (původní formulace: k dané kružnici k sestrojit úsečku, která je stejně dlouhá jako obvod k, resp. úsečku takovou, že čtverec nad ní sestrojený má stejný obsah jako kruh daný k; obě úlohy lze snadno převést na konstrukci π-krát delší úsečky).
- *konstrukce pravidelných n-úhelníků*, pro některá n.

V této sekci si ukážeme důkazovou metodu, kterou vymyslel Pierre Wantzel roku 1837. Její pomocí lze dokázat neřešitelnost všech uvedených úloh (v některých případech za pomoci další teorie, jako je důkaz transcendence čísla π).

Předně musíme upřesnit, co vlastně rozumíme konstrukcí pravítkem a kružítkem. Na začátku je daná jistá konečná množina $\mathcal{M}_0$ bodů v rovině. Z ní můžeme zkonstruovat nový bod jako průsečík přímek nebo kružnic určených již zkonstruovanými body; a tento postup lze několikrát opakovat.

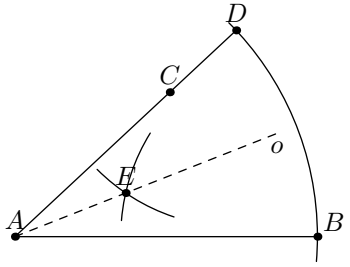
Formálně, *konstrukce pravítkem a kružítkem* je posloupnost $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{M}_n$ konečných množin bodů v rovině taková, že $\mathcal{M}_{i+1} = \mathcal{M}_i \cup \{X\}$, kde X vznikne jako

(1) průsečík přímky AB a přímky CD;
(2) průsečík přímky AB a kružnice $k(C, |DE|)$ se středem C a poloměrem $|DE|$;
(3) průsečík kružnic $k(A, |BC|)$ a $k(D, |EF|)$

pro nějaké body $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{M}_i$.

Princip Wantzelovy metody je převedení konstrukcí pravítkem a kružítkem do jazyka algebry: místo množin bodů budeme uvažovat tělesa souřadnic. Zvolme v rovině souřadnice a uvažujme nejmenší těleso $\mathbf{T}_i \leq \mathbb{R}$, které obsahuje x-ové i y-ové souřadnice všech bodů z $\mathcal{M}_i$. Čili, pokud $\mathcal{M}_i$ obsahuje body $A_1, \ldots, A_k$ se souřadnicemi $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$, pak $\mathbf{T}_i = \mathbb{Q}(a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k)$. Přidáním bodu X se souřadnicemi (u, v) dostaneme $\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i(u, v)$. Výsledkem je řetězec rozšíření těles $\mathbf{T}_0 \leq \mathbf{T}_1 \leq \mathbf{T}_2 \leq \ldots \leq \mathbf{T}_n$.

Příklad (Půlení úhlu)**.** Podívejme se, jak se formalizuje úloha k danému úhlu sestrojit poloviční úhel. Mějme dán úhel třemi body A, B, C (kde A je vrchol).



Sestrojíme body

$$D = k(A, |AB|) \cap AC \quad \text{a} \quad E = k(B, |BD|) \cap k(D, |BD|),$$

výsledkem bude úhel daný body A, B, E. Tedy

$$\mathcal{M}_0 = \{A, B, C\}, \quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0 \cup \{D\}, \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cup \{E\}.$$

Zvolme souřadnice tak, že $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ a $C = (a, b)$. Není těžké spočítat, že $D = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ a $E = (\frac{1}{2} + \frac{a-b\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b+a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2}})$, tedy

$$\mathbf{T}_0 = \mathbb{Q}(a, b), \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_0(\sqrt{a^2 + b^2}), \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_0(\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{3}).$$

Stěžejním krokem Wantzelovy metody je následující vlastnost.

Lemma 7.1. *Pro každou konstrukci pravítkem a kružítkem je* $[\mathbf{T}_{i+1} : \mathbf{T}_i] \in \{1, 2\}$ *pro každé* i.

Důkaz. Probereme postupně všechny tři možnosti, jak se konstruuje nový bod.

(1) Jde-li o průsečík dvou různoběžných přímek, získáme souřadnice nového bodu řešením soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých nad tělesem $\mathbf{T}_i$. Konkrétně, přímka určená body A, B se souřadnicemi (a, b), (c, d), kde $a, b, c, d \in T_i$, má rovnici

$$(b - d)x + (c - a)y = bc - ad$$

a vidíme, že všechny tři koeficienty jsou v tělese $\mathbf{T}_i$. Řešením soustavy lineárních rovnic dvou proměnných nad tělesem $\mathbf{T}_i$ je dvojice (u, v) prvků tělesa $\mathbf{T}_i$, takže $\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i(u, v) = \mathbf{T}_i$ a

$$[\mathbf{T}_{i+1} : \mathbf{T}_i] = 1.$$

(2) Jde-li o průsečík přímky a kružnice, získáme souřadnice nového bodu řešením soustavy jedné lineární a jedné kvadratické rovnice o dvou neznámých nad tělesem $\mathbf{T}_i$. Přímku jsme si rozebrali výše, a kružnice $k(A, |BC|)$ určená body A, B, C se souřadnicemi (a, b), (c, d), (e, f), kde $a, b, c, d, e, f \in T_i$, má rovnici

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (c - e)^2 + (d - f)^2$$

a vidíme, že všechny koeficienty jsou v tělese $\mathbf{T}_i$. Vyjádříme-li z rovnice přímky y a dosadíme jej do kvadratické, dostaneme kvadratickou rovnici pro x, jejíž koeficienty jsou z $\mathbf{T}_i$ a řešením je $x' = u + v\sqrt{s}$ pro nějaká $u, v, s \in T_i$. Dosazením do lineární rovnice zjistíme, že $y' = u' + v'\sqrt{s}$ pro nějaká $u', v' \in T_i$. Čili $\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i(x', y') = \mathbf{T}_i(\sqrt{s})$, z čehož plyne, že

$$[\mathbf{T}_{i+1} : \mathbf{T}_i] \in \{1, 2\}$$

v závislosti na tom, zda je $\sqrt{s} \in T_i$ nebo ne. (Proveďte popsaný výpočet podrobně a ověřte, že skutečně obě řešení náleží $\mathbf{T}_i(\sqrt{s})$!)

(3) Jde-li o průsečík dvou kružnic, získáme souřadnice nového bodu řešením soustavy dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých nad tělesem $\mathbf{T}_i$. Odečtením rovnic od sebe se zbavíme kvadratických členů (všechny mají koeficient 1) a získáme tak ekvivalentní soustavu sestávající z jedné lineární a jedné kvadratické rovnice, vše nad tělesem $\mathbf{T}_i$. Stejným argumentem jako v (2) dostaneme

$$[\mathbf{T}_{i+1} : \mathbf{T}_i] \in \{1, 2\}.$$

(Proveďte popsaný výpočet podrobně sami!) □

Tvrzení 7.2 (stupeň rozšíření pro konstrukce pravítkem a kružítkem)**.** *Pro každou konstrukci pravítkem a kružítkem je* $[\mathbf{T}_n : \mathbf{T}_0] = 2^k$ *pro nějaké* $k \leq n$.

Důkaz. Podle Tvrzení 6.7 je

$$[\mathbf{T}_n : \mathbf{T}_0] = [\mathbf{T}_n : \mathbf{T}_{n-1}] \cdot \ldots \cdot [\mathbf{T}_2 : \mathbf{T}_1] \cdot [\mathbf{T}_1 : \mathbf{T}_0],$$

což je součin jedniček a dvojek. □

Příklad (zdvojení krychle)**.** Zvolme souřadnice tak, že krajní body zadané úsečky (symbolizující hranu krychle) jsou $(0, 0)$ a $(1, 0)$; čili $\mathbf{T}_0 = \mathbb{Q}$. Cílem úlohy je sestrojit úsečku délky $\sqrt[3]{2}$ a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že výsledná úsečka má krajní body $(0, 0)$ a $(\sqrt[3]{2}, 0)$. V tom případě ale $\sqrt[3]{2}$ náleží tělesu $\mathbf{T}_n$, čili $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \leq \mathbf{T}_n$ a podle Tvrzení 6.7 je

$$[\mathbf{T}_n : \mathbf{T}_0] = [\mathbf{T}_n : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3 \cdot [\mathbf{T}_n : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})],$$

což je ve sporu s Tvrzením 7.2.

(Obecněji bychom mohli říci, že z jednotkové úsečky nelze sestrojit žádná úsečka délky a, jejíž polynom $m_{a,\mathbb{Q}}$ má stupeň, který není mocninou dvojky.)

Příklad (rektifikace kružnice a kvadratura kruhu)**.** Analogicky, zvolme souřadnice tak, že krajní body zadané úsečky (udávající střed a poloměr kružnice) jsou $(0, 0)$ a $(1, 0)$; čili $\mathbf{T}_0 = \mathbb{Q}$. Cílem úlohy je sestrojit úsečku délky π (resp. 2π a $\sqrt{\pi}$ v původním zadání). Čili transcendentní číslo π by mělo být prvkem tělesa $\mathbf{T}_n$, ale to je podle Tvrzení 7.2 rozšířením $\mathbb{Q}$ konečného stupně, a tedy podle Tvrzení 6.9 obsahuje pouze algebraická čísla, spor.

(Obecněji bychom mohli říci, že z jednotkové úsečky nelze sestrojit úsečku žádné transcendentní délky.)

Příklad (trisekce úhlu)**.** Stačí najít jedno konkrétní zadání, které není řešitelné pravítkem a kružítkem. Uvažujme tedy úhel $60°$ zadaný body $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; čili $\mathbf{T}_0 = = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Dokážeme, že není možné sestrojit bod

$$(\cos 20°, \sin 20°).$$

(Kdybychom zkonstruovali přímku se směrnicí $20°$ pomocí jiného bodu, dostaneme tento jako její průsečík s jednotkovou kružnicí.) Dokážeme-li, že

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \cos 20°) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 3,$$

můžeme použít stejný argument jako pro zdvojení krychle. K tomuto cíli stačí podle Tvrzení 6.5 nalézt minimální polynom čísla $\cos 20°$ nad tělesem $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, tj. nějaký

ireducibilní polynom, jehož je číslo $\cos 20^\circ$ kořenem. Prolistujeme-li nějakou sbírku goniometrických vzorců, najdeme vztah

$$\cos 3\alpha = 4(\cos\alpha)^3 - 3\cos\alpha,$$

z kterého plyne, že $\cos 20^\circ$ je kořenem polynomu $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[x]$. Tento polynom je v $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$ ireducibilní, neboť nemá v $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ kořen (jak snadno zjistíme dosazením $x = a + b\sqrt{3}$). Tedy

$$m_{\cos 20^\circ, \mathbb{Q}(\sqrt{3})} = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$$

a dostáváme $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \cos 20^\circ) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = \deg m_{\cos 20^\circ, \mathbb{Q}(\sqrt{3})} = 3$.

8. Izomorfismy kořenových a rozkladových nadtěles

Definice. Buď $\mathbf{T}$ těleso a f polynom z $\mathbf{T}[x]$ stupně ≥ 1.

- *Kořenovým nadtělesem* pro f nad $\mathbf{T}$ rozumíme minimální rozšíření, ve kterém má polynom f kořen. Jinými slovy, nadtěleso $\mathbf{S}$, kde existuje $a \in S$ takové, že $\mathbf{S} = \mathbf{T}(a)$ a $f(a) = 0$.
- *Rozkladovým nadtělesem* pro f nad $\mathbf{T}$ rozumíme minimální rozšíření, kde se f rozkládá na lineární činitele. Jinými slovy, nadtěleso $\mathbf{S}$, kde existují $a_1, \ldots, a_n \in S$ taková, že $\mathbf{S} = \mathbf{T}(a_1, \ldots, a_n)$ a $f \parallel (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$.

V zimním semestru jsme dokázali, že taková tělesa existují pro každé těleso $\mathbf{T}$ a každý polynom f (kořenové se zkonstruuje jako faktorokruh $\mathbf{T}[\alpha]/(f(\alpha))$, rozkladové pak rekurzí aplikovanou na polynom $f/(x - \alpha)$). V této sekci si dokážeme jednoznačnost rozkladových nadtěles, až na izomorfismus.

Příklad. Díky základní větě algebry víme, že kořenové i rozkladové nadtěleso polynomu f nad tělesem $\mathbb{Q}$ lze nalézt uvnitř tělesa $\mathbb{C}$: kořenovým bude libovolné $\mathbb{Q}(a)$, kde a je nějaký komplexní kořen f, a rozkladovým bude $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_m)$, kde $a_1, \ldots, a_m$ jsou všechny komplexní kořeny f.

- Uvažujme polynom $x^2 + 1$. Jediným kořenovým nadtělesem obsaženým v $\mathbb{C}$ je těleso $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(-i)$, které obsahuje oba kořeny $\pm i$, a tedy je i nadtělesem rozkladovým.

Označme $\zeta = e^{2\pi i/3}$.

- Uvažujme polynom $x^3 - 1$. Tento polynom má dvě různá kořenová nadtělesa v $\mathbb{C}$, a to $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(1)$ a $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\zeta^2)$. Tato tělesa jistě nejsou izomorfní. To větší je rozkladové, neboť obsahuje všechny tři kořeny.
- Uvažujme polynom $x^3 - 2$. Tento polynom má dvě různá kořenová nadtělesa, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} \cdot \zeta)$ (to druhé obsahuje oba imaginární kořeny). Ač to není vidět na první pohled, tato tělesa jsou izomorfní. Rozkladovým nadtělesem pak bude těleso $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2} \cdot \zeta) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$.

Rozložitelné polynomy typicky nemají izomorfní kořenová nadtělesa: mimo jiné proto, že ireducibilní dělitelé různých stupňů vynucují různý stupeň příslušných kořenových nadtěles. Na druhou stranu, možná trochu překvapivě, pro ireducibilní polynomy jsou všechna kořenová nadtělesa izomorfní. Pro rozkladová nadtělesa dokážeme izomorfismus také, tentokrát již bez předpokladu ireducibility. Než začneme, uvedeme jednu pomocnou definici.

Definice. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}, \mathbf{U}$ tři tělesa. $\mathbf{T}$-izomorfismem $\mathbf{S} \to \mathbf{U}$ rozumíme izomorfismus φ, pro který platí $\varphi(t) = t$ pro každé $t \in T$.

Věta 8.1 (jednoznačnost kořenových a rozkladových nadtěles)**.** *Buď $\mathbf{T}$ těleso a $f \in T[x]$ stupně ≥ 1.*

(1) *Je-li f ireducibilní, pak každá dvě kořenová nadtělesa pro f nad $\mathbf{T}$ jsou $\mathbf{T}$-izomorfní.*
(2) *Každá dvě rozkladová nadtělesa pro f nad $\mathbf{T}$ jsou $\mathbf{T}$-izomorfní.*

Věta 8.1 je speciálním případem o trochu obecnějších Lemmat 8.2 a 8.3 o rozšiřování částečných izomorfismů. K jejich formulaci je potřeba následující značení a pozorování.

Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}_1$, $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}_2$ rozšíření těles a $\varphi : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ $\mathbf{T}$-izomorfismus. Zobrazení φ lze rozšířit na $\mathbf{T}$-izomorfismus oborů polynomů nad těmito tělesy (budeme jej opět značit φ):

$$\varphi : \mathbf{T}_1[x] \to \mathbf{T}_2[x], \qquad \sum a_i x^i \mapsto \sum \varphi(a_i) x^i.$$

Označme $f = \sum a_i x^i$, $g = \sum b_i x^i$. Koeficienty součtu $f + g$ jsou $a_i + b_i$, koeficienty součtu $\varphi(f) + \varphi(g)$ jsou $\varphi(a_i) + \varphi(b_i) = \varphi(a_i + b_i)$ a vidíme, že $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$. Koeficienty součinu fg jsou $\sum_{i+j=k} a_i b_j$, koeficienty součinu $\varphi(f)\varphi(g)$ jsou $\sum_{i+j=k} \varphi(a_i)\varphi(b_j) = \varphi(\sum_{i+j=k} a_i b_j)$ a vidíme, že $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$. Bijektivita zobrazení je zřejmá. Okamžitým důsledkem součinové vlastnosti je, že

- $f \mid g$ v $\mathbf{T}_1[x]$ právě tehdy, když $\varphi(f) \mid \varphi(g)$ v $\mathbf{T}_2[x]$;
- polynom f je ireducibilní v $\mathbf{T}_1[x]$ právě tehdy, když $\varphi(f)$ je ireducibilní v $\mathbf{T}_2[x]$.

Lemma 8.2. *Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}_1$, $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}_2$ rozšíření těles a $\varphi : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ $\mathbf{T}$-izomorfismus. Buď $f \in T_1[x]$ ireducibilní polynom, $\mathbf{T}_1(a)$ kořenové nadtěleso pro f nad $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2(b)$ kořenové nadtěleso pro $\varphi(f)$ nad $\mathbf{T}_2$. Pak existuje $\mathbf{T}$-izomorfismus $\psi : \mathbf{T}_1(a) \to \mathbf{T}_2(b)$ takový, že $\psi(a) = b$ a $\psi|_{T_1} = \varphi$.*

Důkaz. Podle Tvrzení 6.4 je $T_1(a) = T_1[a] = \{g(a) : \ g \in T_1[x]\}$ a $T_2(b) = T_2[b] = \{g(b) : \ g \in T_2[x]\}$. Uvažujme tedy zobrazení

$$\psi : T_1(a) \to T_2(b), \qquad g(a) \mapsto \varphi(g)(b).$$

Předně je třeba dokázat, že to je dobře definované zobrazení. Uvědomte si, že $f = m_{a,\mathbf{T}_1}$, protože f je ireducibilní polynom a a je jeho kořen, a zrovna tak $\varphi(f) = m_{b,\mathbf{T}_2}$, protože $\varphi(f)$ je ireducibilní polynom a b je jeho kořen. Čili

$$g(a) = h(a) \ \Leftrightarrow \ (g - h)(a) = 0 \ \Leftrightarrow \ f \mid g - h$$

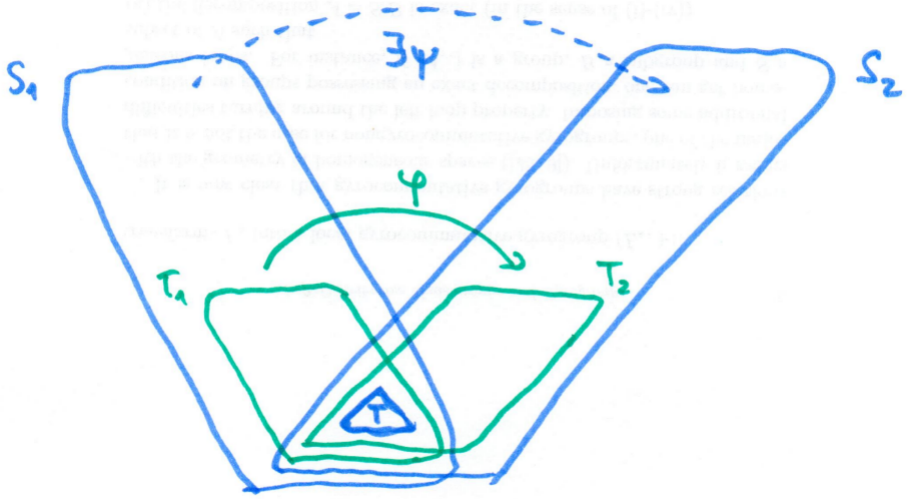
a analogicky

$$\varphi(g)(b) = \varphi(h)(b) \ \Leftrightarrow \ \varphi(g - h)(b) = 0 \ \Leftrightarrow \ \varphi(f) \mid \varphi(g - h).$$

Ekvivalence obou tvrzení na pravé straně plyne z pozorování výše. Dokázali jsme, že φ je dobře definované zobrazení a navíc prosté. Očividně jde o bijekci a je snadné ověřit, že jde o okruhový homomorfismus: pro každé $g, h \in T_1[x]$ platí $\psi(g(a) + h(a)) = \psi((g + h)(a)) = \varphi(g + h)(b) = \varphi(g)(b) + \varphi(h)(b) = \psi(g(a)) + \psi(h(a))$ a analogicky pro násobení. Prvky tělesa $\mathbf{T}_1$ odpovídají volbě konstantního polynomu c, pro takový polynom platí $\psi(c) = \psi(c(a)) = \varphi(c)(b) = \varphi(c)$, čili $\psi|_{\mathbf{T}_1} = \varphi$. Volbou $g = x$ ověříme, že $\psi(a) = b$. □

Lemma 8.3. *Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}_1$, $\mathbf{T} \leq \mathbf{T}_2$ rozšíření těles a $\varphi : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2$ $\mathbf{T}$-izomorfismus. Buď $f \in T_1[x]$ polynom stupně ≥ 1 a označme $\mathbf{S}_1$ rozkladové nadtěleso polynomu f nad $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{S}_2$ rozkladové nadtěleso polynomu $\varphi(f)$ nad $\mathbf{T}_2$. Pak existuje $\mathbf{T}$-izomorfismus $\psi : \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_2$ takový, že $\psi|_{T_1} = \varphi$.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle stupně polynomu f. Je-li $\deg f = 1$, pak $\mathbf{S}_1 = \mathbf{T}_1$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{T}_2$ a $\psi = \varphi$. V indukčním kroku uvažujme ireducibilní dělitel g polynomu f a jeho kořen a v $\mathbf{S}_1$. Pak $\varphi(g)$ je ireducibilní dělitel polynomu $\varphi(f)$ a uvažujme jeho kořen b v $\mathbf{S}_2$. Podle Lemmatu 8.2 existuje zobrazení $\rho : \mathbf{T}_1(a) \to$



Obrázek 7. Ilustrace důkazu jednoznačnosti rozkladového nadtělesa.

$\mathbf{T}_2(b)$ takové, že $\rho(a) = b$ a $\rho|_{T_1} = \varphi$. Napišme $f = (x-a)\cdot h$ pro nějaký $h \in T_1[x]$, čili také $\rho(f) = (x-b)\cdot\rho(h)$. Pak $\mathbf{S}_1$ je rozkladové nadtěleso polynomu h nad $\mathbf{T}_1(a)$ a $\mathbf{S}_2$ je rozkladové nadtěleso polynomu $\rho(h)$ nad $\mathbf{T}_2(b)$. Protože $\deg h < \deg f$, podle indukčního předpokladu existuje $\mathbf{T}$-izomorfismus $\psi : \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_2$ takový, že $\psi|_{T_1(a)} = \rho$, čili také $\psi|_{T_1} = \varphi$. □

Volbou $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}$ a $\varphi = id$ v obou lemmatech dostaneme Větu 8.1.

9. Klasifikace konečných těles

9.1. Frobeniův endomorfismus.

Začneme příkladem homomorfismu, který hraje zásadní roli v okruzích nenulové charakteristiky.

Tvrzení 9.1 (Frobeniův endomorfismus)**.** *Buď* $\mathbf{R}$ *komutativní okruh s jednotkou prvočíselné charakteristiky* p *a definujme zobrazení*

$$\varphi_p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad a \mapsto a^p.$$

(1) *Zobrazení* φ_p *je homomorfismus.*
(2) *Je-li* $\mathbf{R}$ *obor integrity, pak je* φ_p *prosté.*
(3) *Je-li* $\mathbf{R}$ *konečné těleso, pak je* φ_p *automorfismus.*

Zobrazení φ_p se říká *Frobeniův endomorfismus*, resp. *Frobeniův automorfismus* v případě, kdy je bijektivní. Speciálním případem bodu (1) je rovnost

$$(a+b)^p = a^p + b^p,$$

která je snem každého středoškoláka, ale platí pouze za předpokladu prvočíselné charakteristiky p.

Důkaz. (1) Zřejmě $(a\cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ a podle binomické věty

$$(a+b)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^i b^{p-i} = a^p + b^p,$$

neboť p dělí všechny binomické koeficienty $\binom{p}{i}$, $i = 1, \ldots, p-1$, protože všechna prvočísla obsažená ve jmenovateli jsou menší.

(2) Z podmínky $\varphi_p(a) = a^p = 0$ plyne, že $a = 0$. Tedy jádro homomorfismu φ_p je triviální, čili je prostý (Tvrzení 4.2).

(3) Prosté zobrazení na konečné množině je bijektivní. □

9.2. **Derivace a násobné kořeny.**

Buď $\mathbf{R}$ obor integrity. Buď $a \in R$ a $f \in R[x]$. Připomeňme, že prvek a je kořenem f právě tehdy, když $x - a \mid f$. Kořen a nazveme *vícenásobný*, pokud $(x-a)^2 \mid f$.

Derivací polynomu $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ rozumíme polynom $f' = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)a_{i+1}x^i$. Není těžké ověřit (cvičení!), že takto definovaná derivace splňuje všechny základní vzorečky, které znáte z kurzu analýzy. Obor $\mathbf{R}$ může být jakýkoliv, žádné vlastnosti reálných čísel se k tomu nepoužijí, představa derivace jako směrnice tečny není potřeba.

Pro důkaz klasifikace konečných těles se nám bude hodit následující pozorování.

Lemma 9.2. *Nechť polynom f má vícenásobný kořen a. Pak $f'(a) = 0$.*

Důkaz. Napište $f = (x-a)^2 g$ a použijte součinový vzorec na výpočet derivace: $f' = 2(x-a)g + (x-a)^2 g'$, čili $f'(a) = 0$. □

9.3. **Klasifikace konečných těles.**

Aplikací vět o existenci a jednoznačnosti rozkladových nadtěles ukážeme, že pro každou mocninu prvočísla p^k existuje, až na izomorfismus, právě jedno těleso velikosti p^k. Princip důkazu je v tom, že těleso má přesně p^k prvků právě tehdy, když je rozkladovým nadtělesem polynomu $x^{p^k} - x$ nad tělesem $\mathbb{Z}_p$. Z existence a jednoznačnosti rozkladových nadtěles pak plyne existence a jednoznačnost konečných těles.

Lemma 9.3. *Rozkladové nadtěleso polynomu $x^{p^k} - x$ nad tělesem $\mathbb{Z}_p$ má právě p^k prvků.*

Důkaz. Označme $q = p^k$. Buď $\mathbf{T}$ rozkladové nadtěleso polynomu $f = x^q - x$ nad $\mathbb{Z}_p$. Ukážeme, že kořeny f tvoří v $\mathbf{T}$ podtěleso. Tvrzení 9.1 o Frobeniově endomorfismu říká, že zobrazení $\varphi : a \mapsto a^p$ je homomorfismem $\mathbf{T} \to \mathbf{T}$. Jeho k-násobné složení, φ^k, je také homomorfismem a zobrazuje $a \mapsto (((a^p)^p)\dots)^p = a^{p^k} = a^q$, čili

$$(a+b)^q = a^q + b^q \quad \text{a} \quad (a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q$$

pro každé $a, b \in T$. Tedy, jsou-li a, b kořeny polynomu f, tj. $a^q = a$ a $b^q = b$, pak $(a+b)^q = a^q + b^q = a+b$ je také kořen f a stejně tak $(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q = a \cdot b$, $(-a)^q = -a^q = -a$ a $(a^{-1})^q = (a^q)^{-1} = a^{-1}$. Čili kořeny tvoří podtěleso. Z požadavku minimality pak plyne, že rozkladové nadtěleso $\mathbf{T}$ sestává právě z kořenů f, a tedy má *nejvýše* $\deg f = q$ prvků.

Abychom dokázali, že $\mathbf{T}$ má *přesně* q prvků, stačí ověřit, že polynom f nemá vícenásobné kořeny. Kdyby byl prvek a vícenásobným kořenem, podle Lemmatu 9.2 by platilo $f'(a) = 0$. Ovšem $f' = qx^{q-1} - 1 = -1$, a tedy žádné kořeny nemá. □

Lemma 9.4. *Buď $\mathbf{T}$ konečné těleso, $|T| = p^k$. Pak $\mathbf{T}$ je rozkladovým nadtělesem polynomu $x^{p^k} - x$ nad tělesem $\mathbb{Z}_p$ a v $\mathbf{T}[x]$ platí*

$$x^{p^k} - x = \prod_{a \in T} (x - a).$$

Důkaz. Označme $q = p^k$. Nejprve si všimněte, že každý prvek $a \in T$ je kořenem polynomu $f = x^q - x$. Pro 0 to platí triviálně a pro nenulový prvek a využijeme Lagrangeovu větu: $\mathrm{ord}(a) \mid |T^*| = q-1$, čili $a^{q-1} = 1$ a $a^q = a$. Tedy $\prod_{a \in T}(x-a) \mid f$, a z rovnosti stupňů i vedoucích koeficientů dostáváme rovnost těchto polynomů. Ukázali jsme, že f se v $\mathbf{T}$ rozkládá na lineární činitele. Je to ale minimální rozšíření? Ano je, neboť dle předchozího lemmatu má rozkladové nadtěleso polynomu f právě q prvků, čili $\mathbf{T}$ je tímto tělesem. □

Věta 9.5 (klasifikace konečných těles)**.**

(1) *Konečné těleso velikosti n existuje právě tehdy, když $n = p^k$ pro nějaké prvočíslo p a přirozené číslo k.*
(2) *Konečná tělesa stejné velikosti jsou izomorfní.*

Důkaz. (1) ($\Rightarrow$) plyne z Tvrzení 5.3, ($\Leftarrow$) plyne z Lemmatu 9.3 a věty o existenci rozkladových nadtěles. (2) plyne z Lemmatu 9.4 a Věty 8.1 o jednoznačnosti rozkladových nadtěles. □

V zimním semestru jsme představili konečná tělesa ve formě faktorokruhů $\mathbb{Z}_p[\alpha]/(m)$. Lze každé konečné těleso tímto způsobem reprezentovat?

Věta 9.6 (reprezentace konečných těles)**.** *Pro každé prvočíslo p a přirozené číslo k existuje ireducibilní polynom $m \in \mathbb{Z}_p[\alpha]$ stupně k a*

$$\mathbb{F}_{p^k} \simeq \mathbb{Z}_p[\alpha]/(m).$$

Důkaz. Podle Věty 9.5 existuje nějaké těleso $\mathbf{T} \geq \mathbb{Z}_p$ velikosti p^k. V kapitole o cyklických grupách jsme si dokázali, že grupa $\mathbf{T}^*$ je cyklická. Označme a nějaký generátor a uvažujme minimální polynom $m_{a,\mathbb{Z}_p}$. Ten je jistě ireducibilní a jeho stupeň je

$$\deg m_{a,\mathbb{Z}_p} = [\mathbb{Z}_p(a) : \mathbb{Z}_p] = [\mathbf{T} : \mathbb{Z}_p] = k,$$

přičemž první rovnost plyne z Tvrzení 6.5, druhá z faktu, že $\mathbf{T} = \mathbb{Z}_p(a)$, protože $\mathbf{T}$ sestává z mocnin prvku a, a třetí z toho, že vektorový prostor s p^k prvky má dimenzi k. Z jednoznačnosti ve Větě 9.5 plyne, že $\mathbf{T} \simeq \mathbb{Z}_p[\alpha]/(m_{a,\mathbb{Z}_p})$. □

Všimněte si, jakým obratem jsme prokázali existenci ireducibilního polynomu stupně k v $\mathbb{Z}_p[x]$: nejprve jsme prokázali existenci nějakého tělesa velikosti p^k, abychom mohli vzít generátor jeho multiplikativní grupy a jeho minimální polynom. Přímý důkaz existence těchto polynomů je možný, ale mnohem techničtější a dává menší vhled do celé situace.

Algoritmy polynomiální aritmetiky

10. Modulární reprezentace

Cílem této sekce je pochopit princip modulární reprezentace a seznámit se s rychlým algoritmem, který ji počítá, tzv. rychlou Fourierovou transformací.

Principem modulární reprezentace je následující myšlenka: místo jednoho výpočtu ve velikém oboru (celá čísla, polynomy) provedeme několik výpočtů v menších oborech (čísla modulo m, obor koeficientů) a z výsledků zrekonstruujeme řešení původní úlohy. Chytré použití této myšlenky vede u některých úloh k překvapivě rychlým algoritmům.

Modulární reprezentací oboru $\mathbf{R}$, na kterém je definované dělení se zbytkem, rozumíme libovolný izomorfismus

$$\mathbf{R}/(m) \simeq \mathbf{R}/(m_1) \times \ldots \times \mathbf{R}/(m_n)$$
$$a \mapsto (a \bmod m_1, \ldots, a \bmod m_n)$$

pro nějaká $m_1, \ldots, m_n \in R$ po dvou nesoudělná a $m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$. Fakt, že jde o izomorfismus, plyne ze zobecněné čínské věty o zbytcích. Tu jsme nedělali v plné obecnosti, nicméně dělali jsme dva speciální případy, které pokrývají všechny myslitelné aplikace: případ $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$ a případ $\mathbf{R} = \mathbf{T}[x]$ pro nějaké těleso $\mathbf{T}$.

Všimněte si, že modulární reprezentace nereprezentuje věrně celý obor, ale pouze jeho část, danou prvkem m (tj. čísla $< m$, polynomy stupně menšího než $\deg m$). V praxi volíme tolik prvků $m_1, ..., m_n$, kolik je potřeba k věrné reprezentaci celého výpočtu.

Algoritmus pro převod *do* modulární reprezentace je očividný, dělit se zbytkem je v principu snadné. Ale přesto, základní algoritmy mají kvadratickou složitost, což pro některé aplikace nemusí být dostačující.

Převod zpět znamená řešit soustavu lineárních kongruencí. Obecný algoritmus jsme měli v zimním semestru, příklady na cvičeních. Není těžké si spočítat, že jde také o algoritmus s kvadratickou složitostí.

Nešlo by to rychleji? Obecně ne, ale ve speciálních případech ano. Dál se budeme soustředit na obory $\mathbf{T}[x]$ a speciální případ polynomů $m_i = x - u_i$, kde u_i jsou po dvou různé prvky. V tom případě jde o dosazovací homomorfismus, $f \mapsto (f(u_1), ..., f(u_n))$ a potřebovali bychom rychlý algoritmus jak na dosazování hodnot, tak na interpolaci. To je zdánlivě nemožné, vždyť máme n hodnot a polynom má n členů, takže jak se dostat pod kvadratický čas? Řešením je zvolit chytře prvky u_i.

10.1. **Diskrétní Fourierova transformace.**

V celé sekci budeme uvažovat nějaké těleso $\mathbf{T}$. Řekneme, že prvek $\omega \in T$ je *primitivní n-tá odmocnina z jedné*, jestliže je řád prvku ω v grupě $\mathbf{T}^*$ roven n. Jinými slovy, pokud platí

(1) $\omega^n = 1$,
(2) $\omega^i \neq 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dvě poznámky: díky Lagrangeově větě stačí podmínku (2) testovat pouze pro $i \mid n$; z této podmínky také plyne, že $\omega^i \neq \omega^j$ pro všechna $i \neq j < n$.

Pro reprezentaci polynomů stupně $< n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ budeme uvažovat hodnoty v bodech $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, kde ω je primitivní n-tá odmocnina z jedné v tělese $\mathbf{T}$.

Takové reprezentaci se říká *diskrétní Fourierova transformace* a rychlému algoritmu na její výpočet se říká *rychlá Fourierova transformace*. Za jistých předpokladů dostaneme algoritmus s časovou složitostí $O(n \log n)$.

Příklad.

- Těleso $\mathbb{C}$ obsahuje primitivní n-tou odmocninu z jedné pro každé n, např.
$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n).$$
Toto číslo generuje cyklickou grupu, jejíž prvky jsou reprezentovány vrcholy pravidelného n-úhelníka na jednotkové kružnici v komplexní rovině. Každý její generátor je primitivní n-tou odmocninou.
- Těleso $\mathbb{Q}$ obsahuje pouze primitivní druhou odmocninu z jedné, prvek -1. Jiné primitivní odmocniny v něm nejsou.
- Těleso $\mathbb{F}_q$ obsahuje primitivní n-tou odmocninu z jedné právě tehdy, když $n \mid q-1$: v kapitole o cyklických grupách jsme si dokázali, že grupa $\mathbb{F}_q^*$ je cyklická, má $q-1$ prvků, a tedy obsahuje prvek libovolného řádu $n \mid q-1$.

Definice. *Diskrétní Fourierovou transformací* v bodě ω nazveme zobrazení $\mathrm{D}FT_\omega : T^n \to T^n$ definované předpisem
$$\mathrm{D}FT_\omega(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (f(\omega^0), f(\omega^1), \ldots, f(\omega^{n-1})),$$
kde $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$.

Hodnotu polynomu $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ v bodě α lze zapsat jako maticový součin
$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i = \left(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
Dosazujeme-li obecně n hodnot $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, dostáváme vyjádření
$$\begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ f(\alpha_2) \\ \ldots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ & & & \ldots & \\ \alpha_n^0 & \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
Tedy modulární reprezentace v bodech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je vlastně lineární zobrazení (endomorfismus vektorového prostoru $\mathbf{T}^n$)
$$\varphi : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n, \qquad u \mapsto A \cdot u,$$
kde $u = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T$ je sloupcový vektor koeficientů a A je výše uvedená tzv. *Vandermondova matice*. Tato matice je regulární právě tehdy, když jsou prvky α_i po dvou různé. Diskrétní Fourierova transformace v bodě ω je tedy lineárním zobrazením
$$\mathrm{D}FT_\omega : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n, \qquad u \mapsto A_\omega \cdot u,$$
kde A_ω je Vandermondova matice odpovídající prvkům $\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}$, tj.
$$A_\omega = (\omega^{ij})_{i,j=0}^{n-1}.$$

Protože jde o bijekci, můžeme uvažovat inverzní zobrazení $\mathrm{D}FT_\omega^{-1}$, kterému se říká *inverzní DFT* a značí se IDFT_ω. Jde vlastně o *interpolaci* v uvedených bodech. Všimněte si, že
$$\mathrm{IDFT}_\omega(u) = A_\omega^{-1} \cdot u.$$
Následující tvrzení ukazuje, že IDFT je speciálním případem DFT. To nám umožní se soustředit jen na jeden algoritmus pro převod mezi reprezentacemi, který budeme používat pro cestu tam i zpět.

Tvrzení 10.1. *Je-li ω primitivní n-tá odmocnina z jedné v $\mathbf{T}$, pak*

$$(A_\omega)^{-1} = \frac{1}{n} \cdot A_{\omega^{-1}}.$$

Aby tvrzení vůbec dávalo smysl, musíme si uvědomit, že charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ nedělí n. To lze odvodit z faktu, že v $\mathbf{T}$ existuje primitivní n-tá odmocnina z jedné, viz cvičení.

Důkaz. Stačí dokázat, že $A_\omega \cdot (\frac{1}{n} \cdot A_{\omega^{-1}})$ je jednotková matice. Protože

$$A_\omega = \left(\omega^{ij}\right)_{i,j=0}^{n-1} \qquad \text{a} \qquad A_{\omega^{-1}} = \left(\omega^{-ij}\right)_{i,j=0}^{n-1},$$

podle vzorce pro součin matic platí

$$A_\omega \cdot A_{\omega^{-1}} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ik}\omega^{-kj}\right)_{i,j=0}^{n-1}.$$

Pro $i = j$ dostáváme hodnotu

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ik}\omega^{-ki} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

a pro $i \neq j$ hodnotu

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{ik}\omega^{-kj} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(i-j)} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{i-j})^k,$$

což je součet geometrické řady o základu $\omega^{i-j} \neq 1$ (protože ω je primitivní n-tá odmocnina a $|i-j| < n$), a tedy

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{i-j})^k = \frac{(\omega^{i-j})^n - 1}{\omega^{i-j} - 1} = \frac{1-1}{\omega^{i-j}-1} = 0,$$

neboť $\omega^n = 1$. Dokázali jsme, že na diagonále jsou prvky n a mimo diagonálu nuly, tedy po přenásobení $\frac{1}{n}$ dostáváme jednotkovou matici. □

Jinými slovy, dokázali jsme, že

$$\mathrm{IDFT}_\omega = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{DFT}_{\omega^{-1}},$$

bude nám tedy stačit jediný algoritmus na výpočet diskrétní Fourierovy transformace i jejího inverzu.

10.2. **Rychlá Fourierova transformace.**

Rychlou Fourierovou transformací (FFT) se rozumí rychlý algoritmus na výpočet DFT. Jeho principem je opět metoda „rozděl a panuj“. Myšlenka je následující: dosazujeme-li hodnotu α do polynomu $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ lichého stupně (tj. n sudé), můžeme psát

$$f(\alpha) = \underbrace{(a_0 + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-2}\alpha^{n-2})}_{g(\alpha^2)} + \alpha \cdot \underbrace{(a_1 + a_3\alpha^2 + a_5\alpha^4 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-2})}_{h(\alpha^2)},$$

tj.

$$f(\alpha) = g(\alpha^2) + \alpha \cdot h(\alpha^2),$$

kde g, h jsou polynomy poloviční stupně definované

$$g = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i} x^i \qquad \text{a} \qquad h = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1} x^i.$$

Tedy úlohu dosazení hodnoty α do polynomu s n koeficienty jsme rozdělili na dvě úlohy dosazení hodnoty α^2 do polynomů poloviční velikosti.

V DFT ale dosazujeme n-tici hodnot $\omega^0, \ldots, \omega^{n-1}$. Druhá část triku spočívá v tom, že dosazovat stačí pouze hodnoty $\omega^0, \ldots, \omega^{n/2-1}$. Pro primitivní n-tou odmocninu z jedné totiž platí

$$\omega^{n/2+i} = \omega^{n/2} \cdot \omega^i = (-1) \cdot \omega^i = -\omega^i,$$

takže v druhé mocnině jsou oba prvky stejné a dosazovat jich stačí jen polovinu. Původní úlohu jsme tak skutečně rozdělili na dvě poloviční: do poloviních polynomů dosazujeme polovinu hodnot.

Algoritmus 1 (rychlá Fourierova transformace, `FFT`)**.**
vstup: $n = 2^k$, ω primitivní n-tá odmocnina z jedné, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$
výstup: $\mathrm{D}FT_\omega(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$
0. **if** $n = 1$ **then return** a_0
1. $(b_0, \ldots, b_{\frac{n}{2}-1}) := \texttt{FFT}(n/2, \omega^2, a_0, a_2, \ldots, a_{n-2})$
   $(c_0, \ldots, c_{\frac{n}{2}-1}) := \texttt{FFT}(n/2, \omega^2, a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$
2. $d_i := b_i + \omega^i c_i, \quad d_{\frac{n}{2}+i} := b_i - \omega^i c_i \quad$ pro všechna $i = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1$
   return $(d_0, \ldots, d_{n-1})$

Tvrzení 10.2. *Algoritmus 1 funguje.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ je $\mathrm{D}FT_\omega$ dosazení do konstantního polynomu s koeficientem a_0, tedy výsledek je a_0. Provedeme indukční krok. Předně je třeba si uvědomit, že ω^2 je primitivní $\frac{n}{2}$-tá odmocnina z jedné: zřejmě $(\omega^2)^{n/2} = \omega^n = 1$ a dále pro všechna $i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$ platí $(\omega^2)^i = \omega^{2i} \neq 1$, protože $2i < n$ a ω je *primitivní* odmocnina.

Nechť tedy $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ a definujme polynomy g, h jako výše. Podle indukčního předpokladu

$$(b_0, \ldots, b_{\frac{n}{2}-1}) = (g(1), g(\omega^2), g(\omega^4), \ldots, g(\omega^{n-2})),$$
$$(c_0, \ldots, c_{\frac{n}{2}-1}) = (h(1), h(\omega^2), h(\omega^4), \ldots, h(\omega^{n-2})).$$

Chceme dokázat, že pro $i = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ platí

$$d_i = f(\omega^i) \qquad \text{a} \qquad d_{i+\frac{n}{2}} = f(\omega^{i+n/2}).$$

První vztah plyne přímo z výše odvozeného vzorce:

$$f(\omega^i) = g(\omega^{2i}) + \omega^i h(\omega^{2i}) = b_i + \omega^i c_i = d_i.$$

Druhý vztah dostaneme podobně

$$f(\omega^{i+n/2}) = g(\omega^{2i+n}) + \omega^{i+n/2} h(\omega^{2i+n}) = b_i - \omega^i c_i = d_{i+\frac{n}{2}}$$

využitím snadného pozorování, že $\omega^{2i+n} = \omega^{2i}\omega^n = \omega^{2i}$ a že $\omega^{i+n/2} = \omega^i \omega^{n/2} = -\omega^i$. Zde $\omega^{n/2} = -1$, protože to je druhá odmocnina z jedné, a ty jsou pouze dvě: 1 (ta to není, neboť ω je primitivní) a -1. □

Tvrzení 10.3. *Algoritmus 1 má časovou složitost $O(n \log n)$.*

Důkaz. Budeme postupovat podle osvědčeného schématu pro algoritmy typu rozděl a panuj. Označme $T(n)$ počet operací v tělese $\mathbf{T}$, které algoritmus provede na vstupu délky n. Pak $T(1) = 0$ a

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n),$$

tedy $T(n) \leq 2T(n/2) + cn$ pro nějaké c a dosazením $n = 2^k$ dostaneme

$$\begin{aligned} T(2^k) &\leq 2T(2^{k-1}) + c2^k \leq 2(2T(2^{k-2}) + c2^{k-1}) + c2^k \\ &\leq 4T(2^{k-2}) + c(2^k + 2^k) \\ &\leq \dots \\ &\leq 2^k T(2^{k-k}) + ck2^k = 2^k T(1) + ck2^k = O(k2^k). \end{aligned}$$

Tedy $T(n) = O(n \log n)$. □

Příklad. Uvažujme $\mathbf{T} = \mathbb{Z}_{41}$, spočteme modulární reprezentaci polynomu

$$5x^3 + x + 1.$$

Nejprve najdeme primitivní čtvrtou odmocninu z jedné: např. $\omega = -9$ (vidíme, že $\omega^2 = -1$, $\omega^3 = 9$ a $\omega^4 = 1$). Dále počítáme $\mathrm{D}FT_{-9}(1, 1, 0, 5)$. Úlohu rozdělíme na

$$\mathrm{D}FT_{-1}(1, 0) = (1, 1) \qquad \text{a} \qquad \mathrm{D}FT_{-1}(1, 5) = (6, -4).$$

Výsledek bude

$$(1 + (-9)^0 \cdot 6, 1 + (-9)^1 \cdot (-4), 1 - (-9)^0 \cdot 6, 1 - (-9)^1 \cdot (-4)) = (7, -4, -5, 6).$$

10.3. **Primitivní odmocniny z jedné.**

Pro FFT je klíčová existence primitivní odmocniny z jedné. Pokud neexistuje v tělese $\mathbf{T}$, budeme muset počítat v nějakém jiném tělese.

Pro *konečná tělesa* $\mathbb{F}_q$ je situace jasná: primitivní n-tá odmocnina v $\mathbb{F}_q$ existuje právě tehdy, když $n \mid q-1$ a získáme ji jako mocninu $\omega = a^{(p-1)/n}$, kde a je generátor cyklické grupy $\mathbb{F}_q^*$. Ten získáme náhodnou volbou — pravděpodobnost úspěchu je $\varphi(q-1)/(q-1)$, což je typicky poměrně velký zlomek. (Viz zimní semestr.)

Rozebereme si podrobně případ *tělesa* $\mathbb{Q}$. Tam bohužel žádné primitivní odmocniny z jedné nejsou (kromě prvku -1). FFT se přesto používá, přičemž jsou v zásadě dva způsoby, jak to provést. V obou případech je dobré převést úlohu na celočíselnou: vstupní hodnoty přenásobíme dostatečně velkým číslem, aby jmenovatelé zmizeli, výsledek pak týmž číslem vydělíme.

Jedna varianta je počítat v komplexních číslech s přibližnou hodnotou

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n).$$

Jde tedy o *numerickou metodu*, použije se aritmetika v plovoucí čárce. Existují rigorózní odhady na to, s jakou přesností je třeba vzít ω, abychom dostali požadovanou přesnost výsledku. Pokud víme, že je výsledek celočíselný, lze dosáhnout absolutní přesnosti: stačí vzít ω tak, aby výsledná chyba byla menší než $\frac{1}{2}$ a výsledné hodnoty jednoduše zaokrouhlit. Oproti níže uvedené modulární metodě se však tato strategie ukazuje časově náročnější.

Máme-li na vstupu celočíselný polynom, lze využít následující trik: místo v $\mathbb{Z}$ budeme počítat v tělese $\mathbb{Z}_p$, kde p zvolíme tak velké, aby modulární aritmetika neovlivnila výsledek. Konkrétní realizace záleží na zadaném problému, metodu ilustrujeme v příští sekci na příkladě násobení celočíselných polynomů. Na tomto místě poznamenejme, že nás budou zajímat především taková prvočísla p, pro která je $p-1$ dělitelné dostatečně velkou mocninou dvojky – tak velkou, aby $\mathbb{Z}_p$ obsahovalo primitivní odmocninu vhodnou pro FFT. Takovým prvočíslům se někdy říká *FFT-prvočísla*, relativně velká mocnina dvojky dělí $p-1$ např. pro prvočísla 17, 41, 97. Kde je vzít? Existence FFT-prvočísel plyne z Dirichletovy věty: ta říká, že pro každá a, m nesoudělná existuje nekonečně mnoho prvočísel $\equiv a \pmod{m}$, tedy speciálně nekonečně mnoho prvočísel $\equiv 1 \pmod{2^k}$ pro libovolné k. Dirichletova věta však nehovoří nic o tom, jak jsou tato prvočísla rozložená, tj. jak dlouho budeme nějaké hledat. Na tuto otázku zatím není známa přesná odpověď (Riemannova hypotéza,

problém, za který je vypsaná odměna milion dolarů, implikuje, že dlouho hledat nebudeme).

11. Rychlé násobení a dělení polynomů

11.1. **Rychlé násobení.**

Snad nejtypičtější ukázkou použití modulární metody je rychlý algoritmus na násobení polynomů. Tento algoritmus je používán prakticky ve všech aplikacích, v praxi je rychlejší než školské násobení už pro poměrně malé polynomy (trochu záleží, v kterém oboru pracujeme).

Připomeňme, že modulární reprezentace je *okruhový homomorfismus*, tedy zachovává základní operace sčítání a násobení. Konkrétně pro polynomy, při reprezentaci

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbf{T}[x]/m &\simeq \mathbf{T}^n \\ f &\mapsto (f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)),\end{aligned}$$

kde $m = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$, platí

$$\varphi(f \cdot g \bmod m) = \varphi(f) \cdot \varphi(g),$$

přičemž násobení v $\mathbf{T}^n$ se rozumí po složkách. Při volbě

$$n > \deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$$

dostáváme $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$, tedy součin v modulární reprezentaci odpovídá přesně součinu ve standardní reprezentaci. Výhoda je, že k výpočtu součinu v modulární reprezentaci potřebujeme pouze n operací v tělese $\mathbf{T}$.

Na tomto principu je založen algoritmus na rychlé násobení v $\mathbf{T}[x]$. Pro dané polynomy nejprve zvolíme vhodnou modulární reprezentaci – kromě podmínky $n > \deg f + \deg g$ je třeba zvolit takovou reprezentaci, pro kterou máme rychlý převodní algoritmus, jako např. FFT. Poté si spočteme modulární reprezentace $\bar{a}, \bar{b}$ polynomů f, g, spočteme jejich součin $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ (po složkách) a pomocí interpolace zjistíme z vektoru $\bar{c}$ součin $f \cdot g$.

Algoritmus 2 (modulární násobení polynomů)**.**
vstup: $f, g \in T[x]$
výstup: $f \cdot g$
0. zvol $n > \deg f + \deg g$ a vhodné body $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$
1. $\bar{a} = (f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n))$
   $\bar{b} = (g(\alpha_1), \ldots, g(\alpha_n))$
2. $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
3. **return** polynom h stupně $< n$ takový, že $(h(\alpha_1), \ldots, h(\alpha_n)) = \bar{c}$

Příklad. Spočítáme součin polynomů $f = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ a $g = x^3 - \frac{1}{3}x$:

0. zvolíme např. body $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 2$, $\alpha_5 = -2$, $\alpha_6 = 3$,
1. $\bar{a} = (1, 2, 1, 4, 2, 7)$, $\bar{b} = \frac{1}{3} \cdot (0, 2, -2, 22, -22, 78)$,
2. $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \frac{1}{3} \cdot (0, 4, -2, 88, -44, 546)$,
3. interpolací zjistíme, že $h = f \cdot g = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$.

Ponecháme-li stranou volbu modulární reprezentace v kroku 0., algoritmus obnáší dva převody *do* modulární reprezentace polynomů stupně $< n$, jeden z této modulární reprezentace a dále n násobení v tělese $\mathbf{T}$. Při nahodilé volbě $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, použití prostého dosazení hodnot a standardních algoritmů interpolace dostáváme časovou složitost $3 \cdot O(n^2) + O(n) = O(n^2)$, což je na nic. Při „chytré volbě“ DFT reprezentace a použití algoritmu FFT dostáváme časovou složitost

$$3 \cdot O(n \log n) + O(n) = O(n \log n).$$

(Formálně vzato, jde o složitost vyjádřenou vzhledem k n, které volíme v kroku 0. Toto n však typicky závisí lineárně na součtu stupňů daných polynomů – např. v případě FFT volíme $n = 2^k > \deg f + \deg g$, tedy $n \leq 2 \cdot (\deg f + \deg g)$, takže složitost má stejné asymptotické vyjádření i vzhledem ke stupni zadaných polynomů.)

Ve zbytku sekce budeme diskutovat konkrétní realizaci kroku 0. Pokud v $\mathbf{T}$ existuje primitivní n-tá odmocnina z jedné, můžeme přímočaře aplikovat FFT. Je-li $\mathbf{T} = \mathbb{Z}_p$ a příslušná odmocnina neexistuje, problém můžeme převést na výpočet v $\mathbb{Z}$ a výsledek zredukovat modulo p. Násobení racionálních polynomů lze také snadno převést na násobení nad $\mathbb{Z}$: zadané polynomy vynásobíme tak velkými čísly u, v, aby jmenovatelé v koeficientech zmizeli, provedeme součin celočíselných polynomů a výsledek vydělíme součinem uv. Budeme tedy řešit problém *násobení v* $\mathbb{Z}[x]$.

Jak jsme uvedli v předchozí sekci, jedna možnost je *numerický výpočet* s komplexní odmocninou $\omega = e^{2\pi i/n}$. Protože je výsledek celočíselný, stačí zvolit takovou přesnost, aby byla výsledná chyba $< \frac{1}{2}$ (konkrétní odhady lze najít v literatuře).

Příklad. Spočítáme součin polynomů $f = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ a $g = x^3 - \frac{1}{3}x$.
Ve skutečnosti budeme počítat s polynomy $2f = x^2 + x + 2$ a $3g = 3x^3 - x$.

0. Zvolíme $n = 8 = 2^3$ a reprezentaci $\mathrm{D}FT_\omega$ pro $\omega = e^{2\pi i/8} \doteq 0{,}71 + 0{,}71i$. Budeme počítat s přesností na dvě desetinná místa.
1. $\bar{a} = \mathrm{D}FT_\omega(2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) =$

$$(4,\ 2{,}71 + 1{,}72i,\ 0{,}98 + 1{,}01i,\ 1{,}28 - 0{,}31i,\ 2{,}02,\ 1{,}28 + 0{,}32i,\ 0{,}95 - 1{,}02i,\ 2{,}73 - 1{,}79i),$$

$\bar{b} = \mathrm{D}FT_\omega(0, -1, 0, 3, 0, 0, 0, 0) =$

$$(2,\ -2{,}86 + 1{,}44i,\ -4{,}08i,\ 2{,}92 + 1{,}48i,\ -2{,}13,\ 2{,}98 - 1{,}53i,\ 4{,}25i,\ -3{,}04 - 1{,}58i),$$

2. $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} =$

$$(8,\ -10{,}21 - 1{,}01i,\ 4{,}12 - 4{,}02i,\ 4{,}20 + 1{,}01i,\ -4{,}30,\ 4{,}30 - 1{,}01i,\ 4{,}36 + 4{,}04i,\ -11{,}12 + 1{,}11i),$$

3. $\frac{1}{8}\mathrm{D}FT_{\omega^{-1}}(\bar{c}) = (0{,}03,\ -2{,}00,\ -1{,}00,\ 4{,}98,\ 3{,}00,\ 2{,}98,\ 0{,}00,\ 0{,}00)$. Po zaokrouhlení dostáváme (správný) výsledek

$$h = 2f \cdot 3g = 3x^5 + 3x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x.$$

Tedy $f \cdot g = \frac{1}{6} \cdot h = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$.

V praxi se ukazuje efektivnější *modulární metoda* (tentokrát provedená na okruh koeficientů). Místo v $\mathbb{Z}[x]$ budeme počítat součin v $\mathbb{Z}_p[x]$, kde p zvolíme tak velké, aby

$$f \cdot g = (f \cdot g) \bmod p,$$

tj. tak velké, aby žádný koeficient součinu v absolutní hodnotě nepřekročil $p/2$. Prvky $\mathbb{Z}_p$ zde interpretujeme jako $-\lceil p/2 \rceil, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \lfloor p/2 \rfloor$. Jak velké p potřebujeme? Připomeňme vzorec

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\Big) = \sum_{i=0}^{m+n} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\Big) x^i$$

(předpokládejme $n \geq m$). Každý koeficient polynomu $f \cdot g$ je součtem nejvýše $n+1$ součinů $a_j \cdot b_{i-j}$. Označíme-li $r = \max |a_i|$ a $s = \max |b_i|$, pak je každý koeficient $f \cdot g$ v absolutní hodnotě shora omezen hodnotou $(n+1)rs$. Za p tedy zvolíme prvočíslo větší než

$$2(n+1)rs,$$

které navíc splňuje FFT podmínku $2^k \mid p - 1$, kde $2^k > m + n$.

Příklad. Spočítáme součin polynomů $f = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ a $g = x^3 - \frac{1}{3}x$.
Ve skutečnosti budeme počítat s polynomy $2f = x^2 + x + 2$ a $3g = 3x^3 - x$.

0. Vidíme, že $r = 2$, $s = 3$, takže potřebujeme prvočíslo $p > 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ splňující $n = 2^3 \mid p - 1$. Budeme tedy počítat v $\mathbb{Z}_{97}$ a zvolíme reprezentaci $\mathrm{D}FT_\omega$ např. pro $\omega = 50$.
1. $\bar{a} = \mathrm{D}FT_\omega(2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = (4, 30, 76, 88, 2, 27, 23, 57)$,
   $\bar{b} = \mathrm{D}FT_\omega(0, -1, 0, 3, 0, 0, 0, 0) = (2, 45, 88, 86, 95, 52, 9, 11)$,
2. $\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} = (8, 89, 92, 2, 93, 46, 13, 45)$,
3. $\frac{1}{8}\mathrm{D}FT_{\omega^{-1}}(\bar{c}) = (0, -2, -1, 5, 3, 3, 0, 0)$, tedy $h = 3x^5 + 3x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x$.

Tedy $f \cdot g = \frac{1}{6} \cdot h = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$.

V praxi se používají různé varianty výše uvedeného principu. Např. v knihovně NTL jsou implementovány následující dvě vylepšení:

- (Čínská věta o zbytcích) Místo v jednom $\mathbb{Z}_p[x]$ se počítá v několika $\mathbb{Z}_{p_1}[x]$, $\ldots$, $\mathbb{Z}_{p_N}[x]$, přičemž výsledek se zrekonstruuje pomocí čínské věty o zbytcích provedené na každý koeficient výsledného polynomu zvlášť. Všechna p_i samozřejmě musí být FFT prvočísla, ve smyslu $2^k \mid p_i - 1$. Pokud $p_1 \cdot \ldots \cdot p_N > 2(n+1)rs$, zaručeně dostaneme správný výsledek. Výhoda této metody je, že všechna p_i se zpravidla vejdou do jednoho strojového slova, takže operace v $\mathbb{Z}_{p_i}$ jsou velmi rychlé.
- (Schönhage-Strassenův trik) Místo prvočísla p se volí hodnota $M = 2^{2^{k-1}u} + 1$, kde u je tak velké, aby $M > 2(n+1)rs$. Okruh $\mathbb{Z}_M$ sice není těleso, ale to u FFT nevadí (viz cvičení k minulé sekci). Důležité je, že prvek 2^u je 2^k-tá primitivní odmocnina z jedné (ověřte!). Výhoda těchto okruhů je v tom, že počítání modulo číslo tvaru $M = 2^e + 1$ je velmi rychlé (lineární, oproti klasickému kvadratickému): protože $2^e \equiv -1 \pmod{M}$, k redukci čísla a modulo M stačí $\lfloor \log_M a \rfloor$ operací sčítání a odčítání modulo M; násobení a dělení mocninou dvojky se realizuje jako bitový posun, čili nestojí (skoro) nic.

11.2. **Rychlé dělení polynomů.**

K dělení polynomů bohužel nelze přímočaře využít modulární reprezentaci, protože okruhový homomorfismus dělení nezachovává. Ukážeme si sofistikovanější algoritmus: dělení polynomů převedeme na násobení a počítání inverzního prvku v oboru formálních mocninných řad. Rychlé násobení už umíme. A na rychlém výpočtu inverzní řady si předvedeme jednu z variant Newtonovy metody.

Zopakujme stručně pojem *formální mocninné řady* nad komutativním okruhem $\mathbf{R}$. Jde o formální výrazy tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde a_i jsou koeficienty z R. Na těchto výrazech jsou definovány okruhové operace podobně jako pro polynomy:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \pm \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \pm b_i) x^i,$$
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) x^i.$$

Okruh formálních mocninných řad nad $\mathbf{R}$ značíme $\mathbf{R}[[x]]$. Je-li $\mathbf{R}$ obor integrity, pak je $\mathbf{R}[[x]]$ také obor integrity. Polynomy nad $\mathbf{R}$ tvoří jeho podobor. V této sekci budeme potřebovat následující důležitou vlastnost.

Tvrzení 11.1. *Buď $\mathbf{R}$ obor integrity a $f = \sum a_i x^i \in R[[x]]$. Pak f je invertibilní v $\mathbf{R}[[x]]$ právě tehdy, když a_0 je invertibilní v $\mathbf{R}$.*

Důkaz tohoto tvrzení není těžký a plyne z úvah v části 11.3, kde se budeme věnovat efektivnímu výpočtu inverzní mocninné řady. Zatím se podívejme, jak se dá na tento problém převést dělení polynomů.

Pro účely této sekce zavedeme technické označení: pro polynom f definujeme

$$f^* = x^{\deg f} \cdot f(x^{-1}).$$

Jinými slovy, f^* je polynom, který vznikne z f, když napíšeme jeho koeficienty v opačném pořadí. Např. pro $f = 3x^3 + 2x^2 - 1$ je $f^* = x^3 \cdot (3x^{-3} + 2x^{-2} - 1) = 3 + 2x - x^3$.

Buď $\mathbf{T}$ těleso a uvažujme polynomy $f, g \in T[x]$, $g \neq 0$. Označme $n = \deg f$, $m = \deg g$ a předpokládejme $n \geq m$. Chceme spočítat podíl a zbytek, tj. hledáme polynomy $q, r \in T[x]$ splňující

$$f = gq + r, \qquad \deg r < m.$$

Musí tedy platit také

$$f(x^{-1}) = g(x^{-1})q(x^{-1}) + r(x^{-1})$$

a po vynásobení x^n dostáváme podmínku

$$f^* = g^* q^* + x^{n-\deg r} r^*.$$

Dále pracujme v oboru mocninných řad $\mathbf{T}[[x]]$. Protože g^* má zaručeně nenulový absolutní člen, existuje inverzní řada $(g^*)^{-1}$ a po přenásobení touto řadou dostáváme vyjádření

$$q^* = f^* \cdot (g^*)^{-1} - x^{n-\deg r} \cdot r^* \cdot (g^*)^{-1}.$$

Levá strana rovnosti je polynom stupně nejvýše $n - m$, takže mocninná řada na pravé straně rovnosti má všechny členy počínaje x^{n-m+1} nulové. Jenže řada $x^{n-\deg r} \cdot r^* \cdot (g^*)^{-1}$ má prvních $n - \deg r > n - m$ členů nulových, takže q^* je ve skutečnosti rovno prvním $n - m + 1$ členům mocninné řady $f^* \cdot (g^*)^{-1}$!

Algoritmus 3 (rychlé dělení se zbytkem)**.**
vstup: $f, g \in T[x]$, $g \neq 0$
výstup: f div g, f mod g
0. $n := \deg f$, $m := \deg g$, **if** $n < m$ **then return** $0, f$
1. $h :=$ prvních $n - m + 1$ členů mocninné řady $(g^*)^{-1}$
2. $w := f^* \cdot h \bmod x^{n-m+1}$
3. buď q polynom stupně $n - m$, pro který $q^* = w$
4. **return** q, $f - gq$

V kroku 3. nemůžeme jednoduše položit $q = w^*$, neboť nemusí sedět stupně: např. pro $f = x^3$, $g = x$ je $w = 1$, ale $q = x^2 \neq w^*$.

Správnost algoritmu jsme odvodili v předchozím textu. Co se týče složitosti, dělení se zbytkem jsme převedli na *dvě násobení* a *jeden výpočet inverzní řady.* Konkrétně, pro vstup stupně n, m provádíme dvě násobení polynomů stupně $< n$ a hledáme $n-m+1 \leq n$ členů mocninné řady $(g^*)^{-1}$. Násobení umíme řešit s časovou složitostí $O(n \log n)$. Pokud bychom uměli se stejnou složitostí hledat i prvních n členů inverzní mocninné řady, dostali bychom časovou složitost dělení

$$O(n \log n).$$

(V praxi je dělení celočíselných polynomů zhruba pětkrát pomalejší než násobení, viz cvičení.)

Příklad. Spočítáme podíl a zbytek pro polynomy

$$f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \qquad g = x^2 + x - 1.$$

1. Pro $g^* = -x^2 + x + 1$ je $(g^*)^{-1} = 1 - x + 2x^2 + \ldots$, tedy $h = 2x^2 - x + 1$.
2. $w = 1 + 2x^2 + 2x^3 + \ldots \bmod x^3 = 2x^2 + 1$.
3. $q = w^* = x^2 + 2$.
4. Odpovědí je $f \operatorname{div} g = x^2 + 2$ a $f \bmod g = -x + 3$.

11.3. **Výpočet inverzní mocninné řady.**

K dokončení rychlého algoritmu na dělení polynomů zbývá vyřešit problém výpočtu počátečních členů inverzní mocninné řady daného polynomu. Uvažujme tedy mocninnou řadu $f = \sum a_i x^i \in T[[x]]$, budeme hledat řadu $g = \sum b_i x^i \in T[[x]]$ takovou, že $f \cdot g = 1$.

Připomeňme tvrzení 11.1. Pokud $a_0 = 0$, pak $x \mid f$, a tedy nemůže existovat žádná taková řada g. Předpokládejme tedy $a_0 \neq 0$. Z vzorce pro násobení mocninných řad plynou následující podmínky:

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0 \\ a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 &= 0 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Můžeme tedy vyjádřit

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1} \\ b_1 &= -a_0^{-1}(a_1 b_0) \\ b_2 &= -a_0^{-1}(a_1 b_1 + a_2 b_0) \\ b_3 &= -a_0^{-1}(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) \\ &\ldots \end{aligned}$$

a vidíme, že řada $g = f^{-1}$ existuje (a je jednoznačně určena) a zároveň jsme dostali algoritmus, který ji spočte.

K získání prvních n členů $b_0, \ldots, b_{n-1}$ potřebujeme 1 výpočet inverzu, $2 + 3 + 4 + \cdots + n$ operací násobení a $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ operací sčítání v tělese $\mathbf{T}$, tedy celkově

$$O(n^2)$$

operací. To je moc.

K získání n členů je potřeba n kroků, každý z nich s lineární složitostí; v jednom kroku přibyde *jeden nový člen*. My bychom potřebovali složitost $O(n \log n)$, chceme tedy postup, který by umožnil získat n členů v pouhých $\log n$ lineárních krocích. Jinými slovy, v jednom kroku by bylo dobré počet členů *zdvojnásobit*. Ukážeme si postup inspirovaný tzv. *Newtonovou metodou* na hledání kořenů obecných rovnic (viz nějaký kurz numerické matematiky).

Výpočet prvních n členů řady f^{-1} se dá interpretovat následujícím způsobem: k dané řadě f hledáme polynom g stupně $< n$ takový, že

$$f \cdot g = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} + x^n \cdot h,$$

kde h je libovolná řada, nebo jinými slovy

$$f \cdot g \equiv 1 \pmod{x^n}.$$

(Ve výsledku tedy záleží pouze na prvních n členech řady f.)

Přepišme tento vztah jako $x^n \mid fg - 1$. Pak $x^{2n} \mid (fg-1)^2 = f^2 g^2 - 2fg + 1$ a dostáváme

$$f \cdot g \cdot (2 - fg) \equiv 1 \pmod{x^{2n}}.$$

Vidíme, že $g \cdot (2 - fg) \bmod x^{2n}$ je prvních $2n$ členů inverzní mocninné řady f^{-1} a dostáváme tak slibovaný způsob, jak v jednom kroku počet členů zdvojnásobit.

Algoritmus 4.
vstup: n, $f = \sum a_i x^i$ splňující $a_0 \neq 0$
výstup: prvních n členů mocninné řady f^{-1}
0. $g_0 := a_0^{-1}$
1. **for** $i = 1, \ldots, \lceil \log_2 n \rceil$ **do**
   $g_i := g_{i-1} \cdot (2 - f g_{i-1}) \bmod x^{2^i}$
2. **return** $g_{\lceil \log_2 n \rceil} \bmod x^n$

Správnost algoritmu plyne z výše uvedených úvah: každé g_i obsahuje právě 2^i členů mocninné řady f^{-1}. Co se týče časové složitosti, v i-tém kroku cyklu vstupuje do hry polynom $f \bmod x^{2^i}$ stupně $< 2^i$ a polynom g_{i-1} stupně $< 2^{i-1}$. Složitost jednoho kroku (jeden rozdíl a dvě násobení) tak bude při použití rychlého násobení $O(2^i \log 2^i) = O(i 2^i)$ a celkovou časovou složitost můžeme vyjádřit

$$O\left(\sum_{i=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} i 2^i\right) = O\left(\log n \cdot \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} 2^i\right) = O\left(\log n \cdot (2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1} - 1)\right) = O(n \log n)$$

(využíváme odhadu $i \leq \lceil \log_2 n \rceil$ a součtu geometrické řady).

Příklad. Spočítáme první 4 členy mocninné řady f^{-1}, kde

$$f = 1 - 2x + 3x^2 + x^4 - x^5.$$

Klasická metoda vede na vyjádření

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0^{-1} = 1 \\
b_1 &= -a_0^{-1}(a_1 b_0) = -(-2 \cdot 1) = 2 \\
b_2 &= -a_0^{-1}(a_1 b_1 + a_2 b_0) = -((-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1) = 1 \\
b_3 &= -a_0^{-1}(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) = -((-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1) = -4
\end{aligned}$$

zatímco Newtonův algoritmus dává

$$\begin{aligned}
g_0 &= 1 \\
g_1 &= 1 \cdot (2 - f \cdot 1) \bmod x^2 = 1 + 2x \\
g_2 &= (1 + 2x)(2 - f \cdot (1 + 2x)) \bmod x^4 = 1 + 2x + x^2 - 4x^3
\end{aligned}$$

(Vidíme, že celý výpočet závisí výhradně na $f \bmod x^4$.)

12. Rozklady polynomů nad konečnými tělesy

Většina algoritmů na faktorizaci předpokládá, že je vstupní polynom f tzv. *bezčtvercový*, tedy že v jeho ireducibilním rozkladu jsou všechny exponenty $k_1, ..., k_m = 1$. Nejdříve probereme algoritmus, který daný polynom rozloží na součin bezčtvercových (ne nutně ireducibilních), a to s časovou složitostí $O(n^3)$. V druhé části pak ukážeme Berlekampův algoritmus na faktorizaci v $\mathbb{F}_q[x]$.

12.1. Bezčtvercová faktorizace.

Definice. Polynom f se nazývá *bezčtvercový*, pokud neexistuje nekonstantní polynom g takový, že $g^2 \mid f$. *Bezčtvercovým rozkladem* polynomu f rozumíme po dvou nesoudělné bezčtvercové polynomy $h_1, \ldots, h_k$ splňující

$$f = h_1 \cdot h_2^2 \cdot h_3^3 \cdot \ldots \cdot h_k^k$$

(tedy h_i obsahuje právě ty ireducibilní činitele, které se v f vyskytují v i-té mocnině).

Příklad. Bezčtvercovým rozkladem polynomu

$$f = x^8 + x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x = (x^3 + x) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^3$$

v $\mathbb{Z}[x]$ jsou polynomy $h_1 = x^3 + x$, $h_2 = x - 1$, $h_3 = x + 1$.

Připomeňme, že charakteristikou daného oboru rozumíme nejmenší přirozené k splňující $k \cdot 1 = 0$, pokud takové k existuje, resp. 0 v opačném případě. Konečné těleso $\mathbb{F}_q$, kde $q = p^n$, má charakteristiku p.

Základní verze algoritmu na bezčtvercovou faktorizaci funguje pro polynomy nad libovolným gaussovským oborem charakteristiky 0 (rekurzivně tedy i pro polynomy více proměnných). V případě nenulové charakteristiky nastává menší zádrhel, jehož řešení předvedeme pro polynomy jedné proměnné nad konečným tělesem.

Pro obory charakteristiky 0 platí známé tvrzení z kurzu analýzy: pokud $f' = 0$, pak je polynom f konstantní. Obecně to pravda není: při derivaci vznikají celočíselné konstanty, které se mohou v nenulové charkteristice interpretovat jako nuly. Pro konečná tělesa naštěstí můžeme takovou situaci snadno popsat.

Lemma 12.1. *Buď f polynom z $\mathbb{F}_q[x]$, $q = p^n$, takový, že $f' = 0$. Pak $f = g^p$ pro nějaký polynom $g \in \mathbb{F}_q[x]$.*

Polynom g budeme značit $\sqrt[p]{f}$.

Důkaz. Pokud $f' = 0$, pak všechny nenulové členy v f musí mít exponent dělitelný p, tj. můžeme psát $f = \sum a_i x^{ip}$. Definujme $g = \sum b_i x^i$ pro b_i taková, že $b_i^p = a_i$ (můžeme volit $b_i = a_i^{p^{n-1}}$, protože $b_i^p = a_i^{p^n} = a_i$ podle tvrzení 9.3). Užitím tvrzení 9.1 dostaneme $g^p = \sum b_i^p x^{ip} = f$. □

Princip algoritmu na bezčtvercovou faktorizaci popisuje následující věta.

Věta 12.2. *Buď $\mathbf{R}$ gaussovský obor charakteristiky 0 nebo $\mathbf{R} = \mathbb{F}_q$, a buď f primitivní polynom z $\mathbf{R}[x]$.*

(1) *f je bezčtvercový právě tehdy, když* $\mathrm{NSD}(f, f') = 1$.
(2) *Buď $f = \prod_{i=1}^{k} h_i^i$ bezčtvercový rozklad. Pak*
   (a) *pokud* $\mathrm{char}(\mathbf{R}) = 0$, *pak* $\mathrm{NSD}(f, f') = \prod_{i=1}^{k} h_i^{i-1}$;
   (b) *pokud $\mathbf{R} = \mathbb{F}_q$, $q = p^n$, pak* $\mathrm{NSD}(f, f') = \prod_{p|i} h_i^i \cdot \prod_{p\nmid i} h_i^{i-1}$.

Důkaz. (1) ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že f není bezčtvercový. Pak $f = g^2 \cdot h$ pro nějaké netriviální g, h a po zderivování dostáváme $f' = 2gg'h + g^2h'$. Tedy g je společný dělitel f i f', spor.

($\Rightarrow$) Buď $f = \prod_{i=1}^{m} g_i$ ireducibilní rozklad (tj. $g_1, \ldots, g_m$ jsou po dvou neasociované ireducibilní polynomy). Pak

$$f' = g_1' \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_m + g_1 \cdot g_2' \cdot g_3 \cdot \ldots \cdot g_m + \ldots + g_1 \cdot \ldots \cdot g_{m-1} \cdot g_m'.$$

Předpokládejme, že f a f' mají nějakého netriviálního společného dělitele. Pak existuje i nějaký ireducibilní společný dělitel, a ten je roven některému g_i. Protože g_i dělí f' a přitom se vyskytuje ve všech členech výše uvedeného součtu kromě i-tého, musí g_i dělit i i-tý člen, tj. $g_i \mid g_1 \cdots g_{i-1} g_i' g_{i+1} \cdots g_m$. Protože $g_i \nmid g_j$ pro žádné $j \neq i$, musí g_i dělit g_i'. Jenže $\deg g_i' < \deg g_i$, a tedy $g_i' = 0$. V případě charakteristiky 0 to znamená, že je g_i konstantní, spor. V případě konečných těles může ještě nastat možnost, že $g_i = g^p$ pro nějaký (nekonstantní) polynom g, to je ale ve sporu s ireducibilitou g_i.

(2a) Derivací bezčtvercového rozkladu f dostáváme

$$f' = \sum_{j=1}^{k} (h_j^j)' \cdot \prod_{i \neq j} h_i^i = \sum_{j=1}^{k} j \cdot h_j^{j-1} \cdot h_j' \cdot \prod_{i \neq j} h_i^i.$$

Vidíme, že $\prod_{i=1}^{k} h_i^{i-1}$ je společným dělitelem polynomů f a f'. Dokážeme, že to je *největší* společný dělitel. Předpokládejme, že ne, tedy že existuje nekonstantní polynom g, který dělí oba polynomy

$$\frac{f}{\prod_{i=1}^{k} h_i^{i-1}} = \prod_{i=1}^{k} h_i, \qquad \frac{f'}{\prod_{i=1}^{k} h_i^{i-1}} = \sum_{j=1}^{k} j \cdot h_j' \cdot \prod_{i \neq j} h_i.$$

Opět můžeme předpokládat, že je polynom g ireducibilní a tedy že $g \mid h_m$ pro nějaké m. Podobně jako v bodě (1), protože se h_m vyskytuje ve všech členech součtu $\sum_{i=1}^{k} j \cdot h_j' \cdot \prod_{i \neq j} h_i$ kromě m-tého, musí g dělit $m h_m'$. Jenže polynom h_m je bezčtvercový, tedy podle (1) je nesoudělný s h_m', spor.

(2b) Derivace má stejné vyjádření jako v předchozím případě; protože v charakteristice p vypadnou všechny členy, kde $p \mid j$, dostáváme

$$f' = \sum_{j=1}^{k} j \cdot h_j^{j-1} \cdot h_j' \cdot \prod_{i \neq j} h_i^i = \prod_{p \mid i} h_i^i \cdot \left(\sum_{p \nmid j} j \cdot h_j^{j-1} \cdot h_j' \cdot \prod_{p \nmid i \neq j} h_i^i \right)$$

a vidíme, že

$$\prod_{p \mid i} h_i^i \cdot \prod_{p \nmid i} h_i^{i-1}$$

je společným dělitelem polynomů f, f'. Podobně jako v předchozím případě se dokáže, že jde o největšího společného dělitele. □

12.1.1. *Bezčtvercová faktorizace v charakteristice 0.*

Mějme dán polynom f, položme

$$f_1 = \mathrm{NSD}(f, f'), \qquad g_1 = f / f_1$$

a dále definujme induktivně

$$g_{j+1} = \mathrm{NSD}(f_j, g_j), \qquad f_{j+1} = f_j / g_{j+1}.$$

V charakteristice 0 vycházejí pro $f = \prod_{i=1}^{k} h_i^i$ následující hodnoty:

j	f_j	g_j
1	$\prod_{i \geq 2} h_i^{i-1}$	$\prod_{i \geq 1} h_i$
2	$\prod_{i \geq 3} h_i^{i-2}$	$\prod_{i \geq 2} h_i$
3	$\prod_{i \geq 4} h_i^{i-3}$	$\prod_{i \geq 3} h_i$
	$\dots$	$\dots$
$k-1$	h_k	$h_{k-1} h_k$
k	1	h_k
$k+1$	1	1

Vidíme, že délku bezčtvercového rozkladu, tj. hodnotu k, poznáme podle toho, kdy g_{k+1} vyjde konstantní. Z tabulky však lze vyčíst mnohem víc: především to, že podíl g_j / g_{j+1} je roven hledanému polynomu h_j.

Vzhledem k tomu, že NSD jsou definovány až na asociovanost, všechna políčka v tabulce jsou určena až na asociovanost; speciálně, tímto postupem nemusíme nutně získat bezčtvercový rozklad polynomu f, ale nějakého polynomu asociovaného s f. Tuto technickou obtíž je samozřejmě jednoduché vyřešit.

Na základě uvedených myšlenek můžeme zformulovat algoritmus.

Algoritmus 5 (bezčtvercová faktorizace v charakteristice 0)**.**
vstup: $f \in R[x]$ nekonstantní primitivní
výstup: bezčtvercový rozklad $h_1, \dots, h_k$ nějakého polynomu asociovaného s f
1. $f_1 := \mathrm{NSD}(f, f')$, $g_1 := f/f_1$, $j := 1$
2. **while** $\deg g_j > 0$ **do**
   $g_{j+1} := \mathrm{NSD}(f_j, g_j)$, $f_{j+1} := f_j/g_{j+1}$, $h_j := g_j/g_{j+1}$
   $j := j + 1$
3. **return** $h_1, \dots, h_{j-1}$

Tvrzení 12.3. *Algoritmus 5 funguje.*

Důkaz. Mějme na vstupu polynom $f = \prod_{i=1}^{k} h_i^i$. Stačí formálně ověřit indukcí, že $f_j \parallel \prod_{i \geq j+1} h_i^{i-j}$ a $g_j \parallel \prod_{i \geq j} h_i$. Z toho plyne, že skutečně $h_j \parallel g_j/g_{j+1}$, a také že se algoritmus zastaví pro $j = k + 1$.

Pro $j = 1$ obě tvrzení plynou z věty 12.2. V indukčním kroku pak

$$g_{j+1} \parallel \mathrm{NSD}(f_j, g_j) = \mathrm{NSD}(\prod_{i \geq j+1} h_i^{i-j}, \prod_{i \geq j} h_i) = \prod_{i \geq j+1} h_i,$$

a tudíž $f_{j+1} = f_j/g_{j+1} \parallel \prod_{i \geq j+1} h_i^{i-j} / \prod_{i \geq j+1} h_i = \prod_{i \geq j+2} h_i^{i-j-1}$. □

Tvrzení 12.4. *Časová složitost algoritmu 5 je $O(nN(n))$, kde $n = \deg f$ a funkce N značí složitost výpočtu NSD v oboru $\mathbf{R}[x]$.*

Důkaz. Algoritmus počítá $k+1$ hodnot f_j, g_j a k hodnot h_j. Výpočet každé z nich obnáší NSD nebo dělení, přičemž dělení je méně náročné. Celkovou složitost tedy můžeme odhadnout jako $(3k + 2)O(N(n)) = O(nN(n))$. (Odhad $k \leq n$ je nejlepší možný: rovnost nastane v případě, že $h_1 = \cdots = h_{n-1} = 1$ a $\deg h_n = 1$.) □

Příklad. Uvažujme polynom

$$f = x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1.$$

Algoritmus 5 v oboru $\mathbb{Z}[x]$ proběhne následovně:

j	f_j	g_j	h_{j-1}
1	$x^3 + x^2 - x - 1$	$x^4 - 1$	
2	$x + 1$	$x^2 - 1$	$x^2 + 1$
3	1	$x + 1$	$x - 1$
4	1	1	$x + 1$

Odpovědí je $h_1 = x^2 + 1$, $h_2 = x - 1$, $h_3 = x + 1$, čili

$$f = (x^2 + 1)(x - 1)^2(x + 1)^3.$$

Příklad. Uvažujme polynom

$$f = (x + 1)^6.$$

Algoritmus 5 v oboru $\mathbb{Z}[x]$ proběhne následovně:

j	f_j	g_j	h_{j-1}
1	$(x+1)^5$	$x + 1$	
2	$(x+1)^4$	$x + 1$	1
3	$(x+1)^3$	$x + 1$	1
4	$(x+1)^2$	$x + 1$	1
5	$x + 1$	$x + 1$	1
6	1	$x + 1$	1
7	1	1	$x + 1$

Odpovědí je $h_1 = \ldots = h_5 = 1$ a $h_6 = x + 1$.

12.1.2. *Bezčtvercová faktorizace nad konečnými tělesy.*

Uvažujme nyní stejný postup nad tělesem $\mathbb{F}_q$. Podle věty 12.2 vycházejí pro polynom $f = \prod_{i=1}^{k} h_i^i$ následující hodnoty:

j	f_j	g_j
1	$\prod_{p\mid i} h_i^i \cdot \prod_{p\nmid i\geq 2} h_i^{i-1}$	$\prod_{p\nmid i\geq 1} h_i$
2	$\prod_{p\mid i} h_i^i \cdot \prod_{p\nmid i\geq 3} h_i^{i-2}$	$\prod_{p\nmid i\geq 2} h_i$
3	$\prod_{p\mid i} h_i^i \cdot \prod_{p\nmid i\geq 4} h_i^{i-3}$	$\prod_{p\nmid i\geq 3} h_i$
	$\dots$	$\dots$
k	$\prod_{p\mid i} h_i^i$	$\prod_{p\nmid i\geq k} h_i$
$k+1$	$\prod_{p\mid i} h_i^i$	1

Délku bezčtvercového rozkladu, tj. hodnotu k, opět poznáme podle toho, že g_{k+1} vyjde konstantní. Rozdíly jsou dva: v f_k nám zbyde součin těch bezčtvercových faktorů, které jsou v mocnině dělitelné p. Podíl g_j/g_{j+1} vyjde roven h_j pouze v případě, že $p \nmid j$, v opačném případě vyjde 1. Postupem tedy zjistíme všechny bezčtvercové faktory kromě p-tého, $2p$-tého atd. Na konci tedy stačí vzít p-tou odmocninu polynomu f_k a postup opakovat.

Algoritmus 6 (bezčtvercová faktorizace nad konečnými tělesy)**.**
vstup: $f \in \mathbb{F}_q[x]$ nekonstantní
výstup: bezčtvercový rozklad $h_1, \dots, h_k$ nějakého polynomu asociovaného s f

0. **if** $f' = 0$ **then goto 3.**
1. $f_1 := \mathrm{NSD}(f, f')$, $g_1 := f/f_1$, $j := 1$
2. **while** $\deg g_j > 0$ **do**
   $g_{j+1} := \mathrm{NSD}(f_j, g_j)$, $f_{j+1} := f_j/g_{j+1}$, $h_j := g_j/g_{j+1}$
   $j := j + 1$
   $f := f_j$
3. **if** $\deg f = 0$ **then return** $h_1, \dots, h_{j-1}$
   else spočti bezčtvercovou faktorizaci $h_p, h_{2p}, \dots, h_{lp}$ polynomu $\sqrt[p]{f}$,
   return $h_1, h_2, \dots, h_{\max(j-1,lp)}$

Důkaz správnosti je analogický jako pro algoritmus 5.

Příklad. Uvažujme polynom

$$f = x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1.$$

Algoritmus 6 v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$ proběhne následovně:

j	f_j	g_j	h_{j-1}
1	$x^4 - x^3 + x - 1$	$x^3 - x^2 + x - 1$	
2	$x^3 + 1$	$x - 1$	$x^2 + 1$
3	$x^3 + 1$	1	$x - 1$

Dostáváme $h_1 = x^2 + 1$, $h_2 = x - 1$ a zůstává nám polynom $f = x^3 + 1$. Třetí odmocnina je $x + 1$, provedeme tedy nový výpočet s tímto polynomem a výsledek uložíme do h_3 (event. $h_6, h_9, \dots$, kdyby tyto vyšly netriviální). Dostáváme

$$f = (x^2 + 1)(x - 1)^2(x + 1)^3.$$

Příklad. Uvažujme polynom

$$f = x^6 + x^4 + x^2 + 1.$$

Algoritmus 6 v oboru $\mathbb{Z}_2[x]$ proběhne následovně: protože $f' = 0$, budeme rovnou uvažovat druhou odmocninu, tedy polynom $x^3 + x^2 + x + 1$.

j	f_j	g_j	h_{j-1}
1	x^2+1	$x+1$	1
2	$x+1$	$x+1$	1
3	1	$x+1$	1
4	1	1	$x+1$

Spočítali jsme, že $\sqrt{f} = (x+1)^3$, tedy výsledek je $f = (x+1)^6$.

12.2. **Berlekampův algoritmus.**

Nejjednodušším faktorizačním algoritmem v $\mathbb{F}_q[x]$ je *Berlekampův algoritmus*. Jeho složitost vzhledem ke stupni daného polynomu je kubická, nevýhodou jeho základní verze je exponenciální složitost vzhledem k $l(q)$, kde $l(q)$ značí počet cifer čísla q (tedy $l(q) = \Theta(\log q)$). Vstupem je monický bezčtvercový polynom. Principem Berlekampova algoritmu je následující tvrzení.

Tvrzení 12.5. *Buď f monický bezčtvercový polynom z $\mathbb{F}_q[x]$ a uvažujme nekonstantní polynom $h \in \mathbb{F}_q[x]$ splňující*

$$h^q \equiv h \pmod{f}.$$

Pak

$$f = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} \mathrm{NSD}(f, h-a).$$

Důkaz. Polynomy $h-a$ jsou po dvou nesoudělné (protože $\mathrm{NSD}(h-a_1, h-a_2) = \mathrm{NSD}(h-a_1, a_1-a_2) = 1$), tedy po dvou nesoudělné jsou i polynomy $\mathrm{NSD}(f, h-a)$. Protože každý z nich dělí polynom f, tak i $\prod_{a\in\mathbb{F}_q} \mathrm{NSD}(f, h-a)$ dělí f. Zbývá dokázat opak.

Buď $f = g_1 g_2 \cdots g_m$ rozklad f na ireducibilní činitele. Z předpokladu plyne, že $f \mid h^q - h$, a tedy podle tvrzení 9.4 dosazením polynomu h za proměnnou x dostaneme $f \mid \prod_{a\in\mathbb{F}_q}(h-a)$. Protože jsou g_i ireducibilní a $h-a$ po dvou nesoudělné, pro každé i existuje právě jeden prvek $a \in \mathbb{F}_q$ takový, že $g_i \mid h-a$, a tedy také $g_i \mid \mathrm{NSD}(f, h-a)$. Díky bezčtvercovosti jsou polynomy g_i po dvou nesoudělné, takže $f = g_1 \cdots g_m \mid \prod_{a\in\mathbb{F}_q} \mathrm{NSD}(f, h-a)$.

Zjistili jsme, že polynomy f a $\prod_{a\in\mathbb{F}_q} \mathrm{NSD}(f, h-a)$ se navzájem dělí. Protože jsou oba monické, jsou stejné. □

Tvrzení poskytuje netriviální rozklad polynomu f, kdykoliv do něj dosadíme (nekonstantní) polynom h stupně menšího než $\deg f$. Otázka je, kde takový h vzít. Označme

$$W = \{h \in \mathbb{F}_q[x] : \ \deg h < \deg f, \ h^q \equiv h \pmod{f}\}.$$

Další tvrzení vypovídá o struktuře této množiny.

Tvrzení 12.6. *Nechť f je bezčtvercový polynom z $\mathbb{F}_q[x]$ s ireducibilním rozkladem $f = g_1 g_2 \cdots g_m$. Pak*

(1) *pro každý polynom $h \in W$ a každé i je*

$$h \mod g_i \in \mathbb{F}_q,$$

(2) *množina W tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{F}_q$ dimenze m a zobrazení*

$$\varphi : W \to (\mathbb{F}_q)^m, \qquad h \mapsto (h \bmod g_1, \ldots, h \bmod g_m)$$

je izomorfismus vektorových prostorů.

Důkaz. (1) V důkazu předchozího tvrzení jsme viděli, že pro každý nekonstantní polynom $h \in W$ a každé i existuje prvek $a \in \mathbb{F}_q$ takový, že $g_i \mid h-a$. Čili $h \bmod g_i = a \in \mathbb{F}_q$. Pro konstantní polynomy je tvrzení triviální.

(2) Uvedené zobrazení zřejmě zachovává sčítání a skalární násobení. Pokud ověříme, že jde o bijekci, W bude vektorovým prostorem nad $\mathbb{F}_q$ a φ izomorfismus. Zvolme libovolný vektor $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{F}_q^m$ a uvažujme soustavu kongruencí $h \equiv a_i \pmod{g_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Protože jsou g_i po dvou nesoudělné (z bezčtvercovosti), čínská věta o zbytcích zaručuje právě jedno řešení h modulo $g_1 \cdots g_m = f$ stupně $< \deg f$. Přitom podle tvrzení 9.3

$$h^q \equiv a_i^q = a_i \equiv h \pmod{g_i},$$

a tedy díky nesoudělnosti platí $h^q \equiv h$ modulo $g_1 \cdots g_m = f$. Zobrazení φ je tedy bijekce, jediným vzorem vektoru $(a_1, \ldots, a_m)$ je uvedený polynom h. □

Zbývá vyřešit otázku, jak nějaké netriviální prvky W nalézt. Označme $n = \deg f$. Uvažujme polynom

$$h = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \in \mathbb{F}_q[x].$$

Zajímá nás, kdy $h^q \equiv h \pmod{f}$, neboli kdy $h^q \bmod f = h$. Z tvrzení 9.1 a 9.3 vidíme, že

$$h^q = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right)^q = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i x^i \right)^q = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^q x^{iq} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{iq}.$$

Označíme-li $q_{i,j}$ koeficienty polynomu $x^{jq} \bmod f$, tj.

$$\begin{aligned} 1 = x^0 \bmod f &= q_{0,0} + q_{1,0} x + \cdots + q_{n-1,0} x^{n-1} \\ x^q \bmod f &= q_{0,1} + q_{1,1} x + \cdots + q_{n-1,1} x^{n-1} \\ &\cdots \qquad \cdots \\ x^{(n-1)q} \bmod f &= q_{0,n-1} + q_{1,n-1} x + \cdots + q_{n-1,n-1} x^{n-1}, \end{aligned}$$

pak

$$\begin{aligned} h^q \bmod f &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{jq} \right) \bmod f = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (x^{jq} \bmod f) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(a_j \sum_{i=0}^{n-1} q_{i,j} x^i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} q_{i,j} a_j \right) x^i. \end{aligned}$$

Označíme-li koeficienty $h^q \bmod f = b_0 + b_1 x + \ldots b_{n-1} x^{n-1}$, pak lze odvozený vztah zapsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad Q = \begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & \cdots & q_{0,n-1} \\ q_{1,0} & q_{1,1} & \cdots & q_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n-1,0} & q_{n-1,1} & \cdots & q_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Rovnost $h^q \bmod f = h$ tedy nastane právě tehdy, když

$$Q \cdot (a_0, \ldots a_{n-1})^T = (a_0, \ldots, a_{n-1})^T,$$

tedy právě tehdy, když

$$(Q - E) \cdot (a_0, \ldots, a_{n-1})^T = (0, 0, \ldots, 0)^T$$

(zde E značí jednotkovou matici). Odvodili jsme následující tvrzení.

Tvrzení 12.7. *Buď Q matice $n \times n$ jejíž sloupce tvoří koeficenty polynomů*

$$1,\ x^q \bmod f,\ x^{2q} \bmod f,\ \ldots,\ x^{(n-1)q} \bmod f.$$

Pak polynom $h = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ leží ve W právě tehdy, když $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ je řešením homogenní soustavy rovnic s maticí $Q - E$.

Podle tvrzení 12.6 je dimenze prostoru W rovná počtu ireducibilních faktorů polynomu f, a to je rovno dimenzi prostoru řešení uvedené soustavy, tj. hodnotě $n - \mathrm{h}(Q - E)$, kde h značí hodnost matice. Všimněte si, že první sloupec matice $Q - E$ je nulový, takže vektory $(a, 0, 0, \ldots, 0)$ jsou vždy řešením; tyto vektory odpovídají konstantním polynomům ve W, které nás nezajímají, protože neposkytují netriviální rozklad.

Kostra Berlekampova algoritmu je následující:

(1) Gaussovou eliminací vyřešíme soustavu rovnic s maticí $Q-E$. Je-li dimenze prostoru řešení 1, polynom f je ireducibilní. V opačném případě vezmeme libovolné řešení dané soustavy různé od $(a, 0, 0, \ldots, 0)$ a označíme příslušný polynom h.
(2) Ze vzorce z tvrzení 12.5 získáme netriviální rozklad $f = g_1 g_2 \ldots g_l$.
(3) Pokud je l rovno dimenzi prostoru řešení, jsme hotovi. V opačném případě pokračujeme rekurzivně pro každý polynom $g_1, g_2, \ldots, g_l$.

Uvedený postup lze znatelně optimalizovat: místo náhodné volby h si spočteme bázi prostoru řešení $h_1 = 1, h_2, \ldots, h_m$ (polynom $h_1 = 1$ a jeho násobky odpovídají nezajímavým konstantním polynomům). Použijeme h_2 na nalezení netriviálního rozkladu f, jednotlivé faktory se pokusíme dále rozložit polynomem h_3, atd. (Zde aplikujeme tvrzení 12.5 na jednotlivé faktory, předpoklad $h^q \equiv h \pmod{f'}$ platí pro libovolné $f' \mid f$.) Takto postupujeme, dokud nenajdeme m netriviálních faktorů. Je samozřejmě třeba ukázat, že uvedený postup vede k cíli.

V popisu algoritmu ztotožňujeme polynomy stupně $< n$ s prvky $(\mathbb{F}_q)^n$. Proměnná F obsahuje v každém kroku rozklad polynomu f, který je v kroku 4. dále zjemňován.

Algoritmus 7 (Berlekampův)**.**
vstup: $f \in \mathbb{F}_q[x]$ bezčtvercový monický polynom stupně n
výstup: ireducibilní rozklad $g_1, \ldots, g_m$ polynomu f v $\mathbb{F}_q[x]$
1. $Q :=$ matice se sloupci $x^0 \bmod f$, $x^q \bmod f$, …, $x^{(n-1)q} \bmod f$
2. spočti bázi $h_1 = 1, h_2, \ldots, h_m$ prostoru řešení soustavy rovnic $(Q - E)h = 0$
3. $i := 2$, $F := \{f\}$
4. **while** $|F| < m$ **do**
   nahraď každé $g \in F$ netriviálními faktory z rozkladu
   $$g = \textstyle\prod_{a \in \mathbb{F}_q} \mathrm{NSD}(g, h_i - a)$$
   $i := i + 1$
5. **return** F

Tvrzení 12.8. *Algoritmus 7 funguje.*

Důkaz. K důkazu správnosti zbývá ukázat, že každé dva různé ireducibilní faktory polynomu f budou odděleny pomocí nějakého polynomu h_k, tedy že pro každé i, j existuje k a různé prvky $a, b \in \mathbb{F}_q$ takové, že $g_i \mid \mathrm{NSD}(f, h_k - a)$ a $g_j \mid \mathrm{NSD}(f, h_k - b)$. Protože $g_i, g_j \mid f$, stačí hledat k, a, b taková, že $g_i \mid h_k - a$ a $g_j \mid h_k - b$, tj. taková, že $h_k \bmod g_i = a$ a $h_k \bmod g_j = b$. Ještě jinými slovy, pro každé i, j hledáme k takové, že $h_k \bmod g_i \neq h_k \bmod g_j$. Existence takového k plyne snadno z tvrzení 12.6: vektory $\varphi(h_1), \ldots, \varphi(h_m)$ tvoří bázi prostoru $(\mathbb{F}_q)^m$, není tedy možné, aby měly všechny stejnou i-tou a j-tou složku – připomeňme, že $\varphi(h) = (\ldots, h \bmod g_i, \ldots, h \bmod g_j, \ldots)$. □

Příklad. Uvažujme polynom

$$f = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

Protože $\mathrm{NSD}(f, f') = 1$, jde o bezčtvercový polynom, takže můžeme použít Berlekampův algoritmus. Nejprve spočteme matici Q. Platí

$$\begin{aligned} x^0 \bmod f &= 1, \\ x^3 \bmod f &= x^3, \\ x^6 \bmod f &= 2x^2, \\ x^9 \bmod f &= x, \end{aligned}$$

takže

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gaussovou eleminací převedeme $Q - E$ do odstupňovaného tvaru

$$Q - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Báze prostoru řešení je například $(1,0,0,0), (0,1,0,1)$, což odpovídá polynomům $h_1 = 1$, $h_2 = x + x^3$. Polynom f se tedy rozkládá na 2 ireducibilní činitele. Spočteme

$$\begin{aligned} \mathrm{NSD}(f, h_2 - 0) &= \mathrm{NSD}(x^4 + 1, x^3 + x) = 1, \\ \mathrm{NSD}(f, h_2 - 1) &= \mathrm{NSD}(x^4 + 1, x^3 + x + 2) = x^2 + 2x + 2, \\ \mathrm{NSD}(f, h_2 - 2) &= \mathrm{NSD}(x^4 + 1, x^3 + x + 1) = x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Hledaný rozklad je tedy

$$x^4 + 1 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + x + 2).$$

Tvrzení 12.9. *Časová složitost algoritmu 7 v tělese $\mathbb{F}_q$ je $O(n^3 q l(q)^2)$, kde $l(q)$ značí počet cifer čísla q.*

Důkaz. Nejprve spočteme mocninu $x^q \bmod f$ binárním algoritmem se složitostí $O(n^2 l(q)^3)$. V kroku 1. při výpočtu matice Q využijeme vztahu

$$x^{iq} \bmod f = (x^{(i-1)q} \bmod f) \cdot x^q \bmod f,$$

takže potřebujeme n dělení se zbytkem v $\mathbb{F}_q[x]$, přičemž dělíme x^q-násobek předchozího polynomu (stupně $< 2n$) polynomem f stupně n. Krok 1. tedy má složitost $O(n^3 l(q)^3)$. Časová složitost Gaussovy eliminace matice $Q - E$ velikosti $n \times n$ nad tělesem $\mathbb{F}_q$ je $O(n^3 l(q)^2)$. Cyklus v kroku 4. projdeme nejvýše m-krát, $m \leq n$. Při daném průchodu pro každý prvek $g \in F$ počítáme $\mathrm{NSD}(g, h_i - a)$ pro každé $a \in \mathbb{F}_q$, tedy celkem q výpočtů NSD s každým g. Celková složitost kroku 4. tedy bude $m \cdot q \cdot \sum_{g \in F} O(n \deg g l(q)^2) = O(n^2 q l(q)^2 (\sum_{g \in F} \deg g)) = O(n^3 q l(q)^2)$. □

Vidíme, že Berlekampův algoritmus má *exponenciální složitost* vzhledem k délce čísla q, protože v kroku 4. procházíme všechny prvky a tělesa $\mathbb{F}_q$. Přitom ostatní kroky mají složitost pouze $O(n^3 l(q)^3)$, jde tedy o úzké hrdlo tohoto postupu. Dosud není znám žádný deterministický algoritmus polynomiální vzhledem k n i $l(q)$, nicméně existuje řada pravděpodobnostních algoritmů (např. Cantor-Zassenhausův nebo Kaltofen-Shoupův) s polynomiální střední složitostí. První takový algoritmus objevil sám Berlekamp.

Další třídy algebraických struktur

13. Obecné algebraické struktury

13.1. Algebraické struktury.

Dosud se čtenář seznámil se základy tří klasických algebraických teorií: lineární algebry, komutativní algebry a teorie grup. Objektem studia každé z těchto disciplín je speciální typ *algebraické struktury* (vektorový prostor, komutativní okruh, grupa), popsaný jako *množina*, na níž jsou definovány nějaké *operace*, přičemž každá teorie na tyto objekty klade nějaké podmínky, tzv. *axiomy*, které vycházejí z vlastností, které sdílejí stěžejní příklady (např. v komutativní algebře obory polynomů a číselné obory). Tyto společné znaky jsou abstrahovány v definici obecného pojmu *algebraické struktury*.

Definice. *Jazykem* rozumíme množinu Σ spolu se zobrazením $ar : \Sigma \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. Význam této definice je následující: Σ je množina operačních symbolů, které budeme v dané teorii používat, a zobrazení ar udává aritu každého symbolu. Říkáme, že symbol $\sigma \in \Sigma$ je $ar(\sigma)$-ární. Místo 1-ární říkáme *unární*, místo 2-ární říkáme *binární*. Pro binární symboly se zpravidla používají infixové znaky $+, \cdot, *, \circ$ apod., pro unární symboly se někdy používají postfixové znaky $', ^{-1}$ apod.

Buď A množina. *n-ární operací* na A rozumíme zobrazení z kartézské mocniny $A^n = A \times \ldots \times A$ do A. Speciálně, 0-ární operace je zobrazení z jednoprvkové množiny do A, lze ji tedy interpretovat jako *konstantu*.

Algebraická struktura v jazyce Σ je dvojice $\mathbf{A} = (A, \Phi)$, kde A je neprázdná množina, zvaná *nosná množina*, a Φ je zobrazení z množiny Σ do množiny všech operací na A přiřazující symbolu σ nějakou $ar(\sigma)$-ární operaci $\sigma^{\mathbf{A}}$.

Algebraické struktury budeme značit tučným písmenem, jejich nosné množiny kurzívou, s výjimkou standardních značení, která jsme potkali dříve (číselné či polynomiální obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[x]$ apod.). Nebude-li výslovně uvedeno jinak, strukturu a její nosnou množinu značíme stejným písmenem, různým písmem. Struktury v konečném jazyce $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ budeme zapisovat ve tvaru $\mathbf{A} = (A, \sigma_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \sigma_n^{\mathbf{A}})$.

Příklad. *Grupy* jsou algebraické struktury $\mathbf{G} = (G, \Phi)$ v jazyce $\{*, ', e\}$, kde

$$ar(*) = 2,\ ar(') = 1,\ ar(e) = 0,$$

splňující následující podmínky pro všechny prvky $a, b, c \in G$:

$$a *^{\mathbf{G}} (b *^{\mathbf{G}} c) = (a *^{\mathbf{G}} b) *^{\mathbf{G}} c,$$
$$a *^{\mathbf{G}} e^{\mathbf{G}} = e^{\mathbf{G}} *^{\mathbf{G}} a = a,$$
$$a *^{\mathbf{G}} a'^{\mathbf{G}} = a'^{\mathbf{G}} *^{\mathbf{G}} a = e^{\mathbf{G}}.$$

Příklad. *Okruhy s jednotkou* jsou algebraické struktury $\mathbf{R} = (R, \Phi)$ v jazyce $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$, kde $ar(+) = ar(\cdot) = 2$, $ar(-) = 1$, $ar(0) = ar(1) = 0$, takové, že $(R, +^{\mathbf{R}}, -^{\mathbf{R}}, 0^{\mathbf{R}})$ je abelovská grupa, operace $\cdot^{\mathbf{R}}$ je asociativní, pro operace $+^{\mathbf{R}}, \cdot^{\mathbf{R}}$ platí levý a pravý distributivní zákon a platí $a \cdot^{\mathbf{R}} 1^{\mathbf{R}} = 1^{\mathbf{R}} \cdot^{\mathbf{R}} a = a$ pro všechna $a \in R$.

Je-li z kontextu zřejmé, zda mluvíme o symbolu nebo příslušné operaci, budeme pro přehlednost vynechávat horní index.

Příklad. Latinský čtverec $(a_{i,j})_{i,j\in X}$ nad množinou X lze považovat za algebraickou strukturu $(X,*)$ s jednou binární operací, kde $u*v=a_{u,v}$. Struktury vzniklé z latinských čtverců se nazývají *kvazigrupy*.

Následující dva příklady ukazují jisté zádrhele v definici struktury.

Příklad. *Tělesa* lze považovat za algebraické struktury v jazyce okruhů s jednotkou. Můžeme postulovat, že pro každé $0\neq a\in T$ existuje právě jedno $b\in T$ takové, že $a\cdot b=1$ a toto b značit a^{-1}, avšak nejde o operaci ve výše uvedeném smyslu, neboť není definovaná pro nulu.

Příklad. *Vektorové prostory* nad tělesem $\mathbf{T}$ lze považovat za algebraické struktury v jazyce $\{+,-,0,f_\alpha:\ \alpha\in T\}$, kde $ar(+)=2$, $ar(-)=1$, $ar(0)=0$ a $ar(f_\alpha)=1$ pro všechna $\alpha\in T$, takové, že $(V,+,-,0)$ je abelovská grupa a pro všechna $a,b\in V$, $\alpha,\beta\in T$, platí

$$f_{(\alpha+^{\mathbf{T}}\beta)}(a)=f_\alpha(a)+f_\beta(a),\quad f_{\alpha\cdot^{\mathbf{T}}\beta}(a)=f_\alpha(f_\beta(a)),$$
$$f_\alpha(a+b)=f_\alpha(a)+f_\alpha(b),\quad f_1(a)=a.$$

Symboly f_α interpretujeme jako skalární násobení prvkem α, tj. $f_\alpha(v)=\alpha\cdot v$. Skalární součin není binární operace ve výše uvedeném smyslu, neboť jde o zobrazení $T\times V\to V$.

Další příklady zajímavých tříd algebraických struktur uvidíme v sekci 14 o svazech a Booleových algebrách.

Ve všech výše uvedených teoriích se opakují některé základní algebraické pojmy: podstruktury, direktního součiny, homomorfismy a faktorstruktury. Ve zbytku kapitoly dáme těmto konceptům společný rámec.

13.2. **Podstruktury.**

Definice. Buď f n-ární operace na množině A a $B\subseteq A$. Řekneme, že podmnožina B je *uzavřena na operaci* f, pokud pro všechna $b_1,\dots,b_n\in B$

$$f(b_1,\dots,b_n)\in B.$$

Buď $\mathbf{A}=(A,\Phi)$ struktura v jazyce Σ. *Podstrukturou* struktury $\mathbf{A}$ rozumíme strukturu $\mathbf{B}=(B,\Psi)$ ve stejném jazyce, kde $B\subseteq A$ je uzavřena na všechny operace z Φ a kde Ψ obsahuje restrikce operací z Φ na množinu B, tj. $\sigma^{\mathbf{B}}=\sigma^{\mathbf{A}}|_B$ pro všechna $\sigma\in\Sigma$. Značíme $\mathbf{B}\leq\mathbf{A}$.

Uvedená definice je kompatibilní s definicemi podstruktur, které již znáte: podstruktura vektorového prostoru je totéž co podprostor, podstruktura okruhu je podokruh, podstruktura grupy je podgrupa.

Příklad. Na operacích dané struktury záleží: podmnožina $\mathbb{N}$ tvoří podstrukturu struktury $(\mathbb{Z},+)$, ale nikoliv $(\mathbb{Z},-)$.

Tvrzení 13.1 (průnik podstruktur)**.** *Buď $\mathbf{A}$ struktura a $\mathbf{B}_i$, $i\in I$, její podstruktury. Pak $\bigcap_{i\in I}B_i$ je buď prázdná množina, nebo tvoří podstrukturu struktury $\mathbf{A}$.*

Jde-li o podstrukturu, budeme ji značit $\bigcap_{i\in I}\mathbf{B}_i$.

Důkaz. Označme $B=\bigcap_{i\in I}B_i$ a předpokládejme $B\neq\emptyset$. Buď σ symbol arity n a $b_1,\dots,b_n\in B$. Pak $b_1,\dots,b_n\in B_i$ pro všechna $i\in I$, tedy $\sigma^{\mathbf{A}}(b_1,\dots,b_n)\in B_i$ pro všechna $i\in I$, neboť každá množina B_i je na tuto operaci uzavřena, a tedy $\sigma^{\mathbf{A}}(b_1,\dots,b_n)\in\bigcap_{i\in I}B_i=B$. □

Tvrzení 13.2 (sjednocení podstruktur)**.** *Buď $\mathbf{A}$ struktura a $\mathbf{B}_1\leq\mathbf{B}_2\leq\mathbf{B}_3\leq\dots$ její podstruktury. Pak $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i$ tvoří podstrukturu struktury $\mathbf{A}$.*

Tuto podstrukturu budeme značit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{B}_i$.

Důkaz. Označme $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Buď σ symbol arity n a $b_1, \ldots, b_n \in B$. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $b_1, \ldots, b_n \in B_k$: vzhledem k tomu, že každé $b_j \in B_{k_j}$ pro nějaké $k_j \in \mathbb{N}$, stačí zvolit $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Pro toto k pak platí $\sigma^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B_k$, a tedy $\sigma^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = B$. □

Uvažujme podmnožinu $\emptyset \neq X \subseteq A$ v struktuře $\mathbf{A}$. Podstrukturou *generovanou množinou* X rozumíme nejmenší podstrukturu (vzhledem k inkluzi) struktury $\mathbf{A}$ obsahující podmnožinu X, značíme ji $\langle X\rangle_{\mathbf{A}}$. Taková podstruktura jistě existuje: stačí vzít průnik všech podstruktur obsahujících množinu X, tj.

$$\langle X\rangle_{\mathbf{A}} = \bigcap_{X\subseteq B,\ \mathbf{B}\leq\mathbf{A}} \mathbf{B}.$$

Podle Tvrzení 13.1 je tento průnik skutečně podstrukturou, jistě obsahuje množinu X a mezi všemi takovými podstrukturami je nejmenší.

Prvky podstruktury $\langle X\rangle_{\mathbf{A}}$ můžeme najít tak, že začneme s prvky množiny X a aplikováním operací struktury $\mathbf{A}$ získáváme postupně další prvky. Pokud již žádné nové prvky nevznikají, tedy když je výsledná podmnožina uzavřena na všechny operace struktury $\mathbf{A}$, našli jsme podstrukturu.

Příklad. Na operacích dané struktury záleží: pro dané $n \in \mathbb{Z}$

- $\langle n\rangle_{(\mathbb{Z},+)} = \{kn :\ k \in \mathbb{N}\}$,
- $\langle n\rangle_{(\mathbb{Z},\cdot)} = \{n^k :\ k \in \mathbb{N}\}$.

13.3. **Homomorfismy a izomorfismus.**

Definice. Buď $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ struktury ve stejném jazyce Σ. Zobrazení $\varphi : A \to B$ se nazývá *homomorfismus* struktur $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, pokud

$$\varphi(\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \sigma^{\mathbf{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$$

pro každý n-ární symbol $\sigma \in \Sigma$ a všechna $a_1, \ldots, a_n \in A$. Říkáme, že φ *zachovává operace* těchto algeber. Píšeme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Pro speciální typy homomorfismů se používá následující terminologie:

- *vnoření* je prostý homomorfismus (někdy se užívá značení $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$),
- *izomorfismus* je homomorfismus, který je bijekcí (značení $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$),

a dále

- *endomorfismem* struktury $\mathbf{A}$ rozumíme homomorfismus $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$,
- *automorfismem* struktury $\mathbf{A}$ rozumíme izomorfismus $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

Identické zobrazení $id : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, $x \mapsto x$, je vždy homomorfismem.

Oboru hodnot daného homomorfismu $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se v algebře říká *obraz* a značí se $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) : a \in A\}$. Obraz vždy tvoří podstrukturu struktury $\mathbf{B}$: je-li σ n-ární symbol a $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{Im}(\varphi)$, pak $b_1 = \varphi(a_1), \ldots, b_n = \varphi(a_n)$ pro nějaká $a_1, \ldots, a_n \in A$ a platí

$$\sigma^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = \sigma^{\mathbf{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = \varphi(\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in \mathrm{Im}(\varphi).$$

Homomorfismy jsou jednoznačně určeny svými hodnotami na generátorech. (Ale není pravda, že dané hodnoty na generátorech lze rozšířit do homomorfismu: to je specifikum vektorových prostorů, nebo obecně tzv. *volných algeber*.) Tento princip lze využít k hledání všech homomorfismů mezi dvěma strukturami.

Úloha. Najděte všechny homomorfismy $(\mathbb{Z}, -) \to (\mathbb{Z}, -)$.

Řešení. Všimněte si, že $(\mathbb{Z}, -) = \langle 1 \rangle$, tedy z hodnoty v 1 půjde spočítat všechny ostatní hodnoty. Uvažujme homomorfismus φ. Je-li $\varphi(1) = k$, dokážeme indukcí, že $\varphi(a) = ka$ pro všechna a. Nejprve spočteme $\varphi(0) = \varphi(1-1) = \varphi(1) - \varphi(1) = k - k = 0$ a $\varphi(-1) = \varphi(0-1) = \varphi(0) - \varphi(1) = -k$. V indukčním kroku pak pro kladná a platí $\varphi(a) = \varphi((a-1)-(-1)) = \varphi((a-1)) - \varphi(-1) = k(a-1) - (-k) = ka$ a podobně pro postupujeme pro záporná a. Zbývá ověřit, že jsme skutečně dostali homomorfismus: $\varphi(a-b) = k(a-b) = ka - kb = \varphi(a) - \varphi(b)$ pro všechna a, b. □

Pokud nejsme schopni efektivně použít generující množinu, jako třeba v následující úloze, můžeme zkusit využít prvků se zvláštními vlastnostmi, které jsou zachovány každým homomorfismem (viz též diskuse invariantů v sekci 1.3).

Úloha. Najděte všechny homomorfismy $(\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$.

Řešení. Uvažujme homomorfismus φ. Z rovnosti $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$ plyne $\varphi(0) = 0$ a dostáváme $0 = \varphi(0) = \varphi(n \cdot 0) = \varphi(n) + \varphi(0) = \varphi(n)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Existuje tedy jediný homomorfismus $n \mapsto 0$. □

Podobně jako pro grupy a okruhy se dokáží následující vlastnosti.

Tvrzení 13.3. *Buď $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ struktury ve stejném jazyce a $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ a $\psi : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ homomorfismy. Pak*

(1) *složené zobrazení $\psi \circ \varphi$ je homomorfismus $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$;*
(2) *je-li φ izomorfismus, pak inverzní zobrazení φ^{-1} je izomorfismus $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$.*

Z Tvrzení 13.3 plyne, že automorfismy dané struktury $\mathbf{A}$ tvoří podgrupu symetrické grupy $\mathbf{S}_A$, značíme $\mathbf{Aut}(\mathbf{A})$.

Řekneme, že struktury $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou *izomorfní*, značíme $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$, pokud existuje izomorfismus $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Stejně jako pro grupy a okruhy, izomorfismus si lze představit jako kopírování operací z jedné nosné množiny na druhou, tj. dvě algebraické struktury jsou izormofní, pokud se liší pouze „přejmenováním prvků". Z Tvrzení 13.3 plyne, že izomorfismus dává ekvivalenci na třídě všech algeber v daném jazyce.

Připomeňme, že *invariantem izomorfismu* rozumíme vlastnost V takovou, že kdykoliv $\mathbf{A}$ má vlastnost V a $\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$, pak $\mathbf{B}$ má také vlastnost V. O grupových invariantech jsme psali v sekci 1.3 a řada z nich má obecnou platnost (minimální počet generátorů, rovnosti, jisté typy význačných prvků). Obecně lze říci, že invariantem je jakákoliv vlastnost, kterou lze vyjádřit pomocí tzv. *formulí prvního řádu* v daném jazyce, tj. pomocí výrazů používajících kvantifikátory, proměnné, logické spojky, rovnítko a operace z daného jazyka. Přesnou formulaci a důkaz najdete ve většině učebnic matematické logiky.

13.4. **Kongruence a faktorstruktury.**

V úvodu sekce 2.2 jsme psali o tom, jak se napříč matematikou opakuje myšlenka konstrukce faktorobjektu, ztotožnění navzájem blízkých prvků. Nyní popíšeme, jak tato konstrukce funguje pro obecné algebraické struktury.

Buď $\mathbf{A} = (A, \Phi)$ algebraická struktura v jazyce Σ. Uvažujme ekvivalenci $\sim$ na množině A, která nám bude říkat, které prvky chceme ztotožnit. Operace faktorstruktury $\mathbf{A}/\!\sim$ bychom rádi definovali tak, že výsledek n-ární operace $\sigma^{\mathbf{A}/\sim}$ na blocích $[a_1], \ldots, [a_n]$ by měl být roven bloku $[\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)]$. Ovšem aby byla taková operace dobře definovaná, ekvivalence $\sim$ nemůže být ledajaká. Takové ekvivalence se nazývají *kongruence*.

Definice. Buď $\mathbf{A}$ struktura v jazyce Σ. Ekvivalence $\sim$ na nosné množině A se nazývá *kongruence* struktury $\mathbf{A}$, pokud pro každý n-ární symbol $\sigma \in \Sigma$ a všechna $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ platí

$$a_1 \sim b_1,\ \ldots,\ a_n \sim b_n \quad \Rightarrow \quad \sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \sim \sigma^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Pro unární symbol $'$ podmínka říká, že pokud $a \sim b$, pak $a' \sim b'$. Pro binární symbol $*$ podmínka říká

$$a \sim b,\ c \sim d \quad \Rightarrow \quad a * c \sim b * d,$$

což, jak si snadno čtenář odvodí, je ekvivalentní podmínce $a \sim b \Rightarrow a * c \sim b * c$ a $c * a \sim c * b$ pro všechna c. Konstanty nehrají u kongruencí žádnou roli, protože $c \sim c$ pro každé c.

Příklad. Uvažujme strukturu $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot)$. V zimním semestru jsme si dokázali, že relace $\equiv \pmod{n}$ je kongruencí této struktury.

Vzhledem k tomu, že obecné algebraické struktury nemusí obsahovat význačné prvky (jednotka v grupách, nula v okruzích, apod.), nelze čekat, že by kongruence byly určeny nějakými podobjekty (jako jsou normální podgrupy či ideály).

Definice. Buď $\mathbf{A}$ algebraická struktura a $\sim$ její kongruence. Uvažujme množinu $A/{\sim} = \{[a]_\sim :\ a \in A\}$ a definujme na ní operace předpisem

$$\sigma^{\mathbf{A}/\sim}([a_1]_\sim, \dots, [a_n]_\sim) = [\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)]_\sim$$

pro každý n-ární symbol $\sigma \in \Sigma$ a všechna $a_1, \dots, a_n \in A$. Z definice kongruence vidíme, že jsou operace dobře definovány: pokud označíme bloky jiným způsobem, tj. pokud $[a_1] = [b_1]$, …, $[a_n] = [b_n]$, pak $[\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)] = [\sigma^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)]$, čili výsledek operace je na označení nezávislý. Struktura

$$\mathbf{A}/{\sim} = (A/{\sim}, (\sigma^{\mathbf{A}/\sim} : \sigma \in \Sigma))$$

se nazývá *faktorstruktura* $\mathbf{A}$ *podle kongruence* $\sim$.

Buď $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ homomorfismus. Jeho *jádrem* rozumíme relaci na A definovanou

$$a \sim_\varphi b \ \Leftrightarrow\ \varphi(a) = \varphi(b).$$

Následující tvrzení říká, že jádro je kongruencí struktury $\mathbf{A}$, a že každá kongruence je jádrem nějakého homomorfismu.

Tvrzení 13.4 (jádra vs. kongruence)**.** *Buď* $\mathbf{A}$ *struktura a* $\sim$ *relace na její nosné množině* A*. Pak* $\sim$ *je kongruencí struktury* $\mathbf{A}$ *právě tehdy, když je jádrem nějakého homomorfismu z* $\mathbf{A}$ *do nějaké struktury* $\mathbf{B}$*.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Uvažujme zobrazení

$$\varphi : A \to A/{\sim}, \qquad a \mapsto [a]_\sim.$$

Z definice operací faktorstruktury ihned plyne, že jde o homomorfismus $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/{\sim}$. Jeho jádrem jsou právě ty dvojice (a, b), pro které $[a]_\sim = [b]_\sim$, tedy $a \sim b$.

($\Leftarrow$) Uvažujme nějaký homomorfismus $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Jeho jádro je zřejmě ekvivalencí, dokážeme, že jde o kongruenci. Uvažujme n-ární symbol σ. Buď $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n \in A$ taková, že $a_i \sim_\varphi b_i$, tj. $\varphi(a_i) = \varphi(b_i)$, pro všechna i. Pak

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) &= \sigma^{\mathbf{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \\ &= \sigma^{\mathbf{B}}(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)) = \varphi(\sigma^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)),\end{aligned}$$

a tedy $\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \sim_\varphi \sigma^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)$. □

Podobně jako pro grupy a okruhy platí věta o homomorfismu a 1. věta o izomorfismu.

Věta 13.5 (věta o homomorfismu)**.** *Buď* $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *homomorfismus algeber.*

(1) *Je-li* $\sim$ *kongruence struktury* $\mathbf{A}$ *obsažená v jádru* $\sim_\varphi$*, pak je zobrazení*

$$\psi : \mathbf{A}/{\sim} \to \mathbf{B}, \qquad [a]_\sim \mapsto \varphi(a)$$

dobře definované a je to homomorfismus.

(2) (1. věta o izomorfismu) $\mathbf{A}/{\sim_\varphi} \simeq \mathbf{Im}(\varphi)$.

Důkaz. (1) Předně je třeba ověřit, že je zobrazení ψ dobře definované: pokud $[a]_\sim = [b]_\sim$, tj. pokud $a \sim b$, pak $a \sim_\varphi b$, a tedy $\varphi(a) = \varphi(b)$. Je to homomorfismus, protože pro n-ární symbol σ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$\begin{aligned}\psi(\sigma^{\mathbf{A}/\sim}([a_1]_\sim, \dots, [a_n]_\sim)) &= \psi([\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)]_\sim) = \varphi(\sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) \\ &= \sigma^{\mathbf{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \sigma^{\mathbf{B}}(\psi([a_1]_\sim), \dots, \psi([a_n] \sim)).\end{aligned}$$

(2) Vztáhneme část (1) na samu kongruenci $\sim_\varphi$: výsledný homomorfismus ψ je prostý, neboť $a \sim b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$. □

Poznámka. Konstrukce faktorgrup a faktorokruhů je speciálním případem konstrukce faktorstruktury.

- Buď $\mathbf{G}$ grupa a $\mathbf{N}$ její normální podgrupa. Jak jsme si ukázali v sekci 2.2, relace definovaná $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in N$ je kongruencí grupy $\mathbf{G}$. Struktury $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ a $\mathbf{G}/\sim$ jsou totožné.
- Buď $\mathbf{R}$ okruh a I jeho ideál. Jak jsme si ukázali v sekci 4.3, relace definovaná $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$ je kongruencí okruhu $\mathbf{R}$. Struktury $\mathbf{R}/I$ a $\mathbf{R}/\sim$ jsou totožné.

Naopak, žádné jiné faktorstruktury grup a okruhů nejsou: kongruence a normální podgrupy, resp. kongruence a idály, si vzájemně jednoznačně odpovídají.

- Je-li $\sim$ je kongruencí grupy $\mathbf{G}$, blok $[1]_\sim$ je normální podgrupou v $\mathbf{G}$: pokud $a, b \in [1]_\sim$, tj. $a \sim b \sim 1$, pak $a \cdot b \sim 1 \cdot 1 = 1$ a $a^{-1} \sim 1^{-1} = 1$, čili jde o podgrupu. Pokud $a \sim 1$ a $g \in G$, pak $gag^{-1} \sim g1g^{-1} = 1$, což prokazuje normalitu.
- Je-li $\sim$ je kongruencí okruhu $\mathbf{R}$, blok $[0]_\sim$ je ideálem v $\mathbf{R}$: výše jsme dokázali, že jde o aditivní podgrupu, a pokud $a \sim 0$ a $r \in R$, pak $ar \sim 0r = 0$ a $ra \sim r0 = 0$, čili je to ideál.

14. Uspořádání a svazy

14.1. Uspořádané množiny.

V této části zopakujeme základní pojmy týkající se uspořádání. Většinu z nich by měl čtenář znát z předchozích kurzů.

Definice. Relaci $\leq$ na množině A nazýváme *částečné uspořádání*, pokud je

(1) *reflexivní*, tj. $a \leq a$ pro všechna $a \in A$,
(2) *tranzitivní*, tj. $a \leq b$ a $b \leq c$ implikuje $a \leq c$,
(3) *antisymetrická*, tj. $a \leq b$ a $b \leq a$ implikuje $a = b$.

Alternativně říkáme, že $(A, \leq)$ je *uspořádaná množina*. Uspořádání se nazývá *lineární*, pokud navíc pro každé a, b nastane $a \leq b$ nebo $b \leq a$. *Intervalem* rozumíme množinu

$$[a, b] = \{u \in A : \ a \leq u \leq b\}.$$

Pokud $a \leq b$ a $a \neq b$, píšeme $a < b$.

Příklad. Na množině přirozených čísel jsou dvě přirozená uspořádání:

- $(\mathbb{N}, \leq)$ dané standardním uspořádáním $1 < 2 < 3 < \dots$ (toto uspořádání je lineární);
- $(\mathbb{N}, |)$ dané dělitelností, tj. „a je menší než b pokud $a \mid b$“ (toto uspořádání není lineární).

Příklad. Na množině množin je přirozené brát uspořádání inkluzí:

- $(P(X), \subseteq)$: na množině $P(X)$ všech podmnožin dané množiny X řekneme, že „A je menší než B“, pokud $A \subseteq B$;

- $(Eq(X), \subseteq)$: na množině $Eq(X)$ všech ekvivalencí na množině X řekneme, že „$\sim$ je menší než $\approx$“, pokud $\sim \subseteq \approx$, tj. pokud $a \sim b$ implikuje $a \approx b$;
- analogicky lze uspořádat podstruktury dané struktury (inkluzí jejich nosných množin), či kongruence dané struktury.

Konečné uspořádané množiny lze popsat pomocí tzv. *Hasseova diagramu*. Jde o graf relace $\leq$, přičemž nekreslíme smyčky (reflexivita), vynecháváme všechny hrany, jejichž existence je zaručena tranzitivitou, a místo šipek kreslíme neorientované hrany tak, aby větší prvky byly výše. Například:

$\mathbf{A} =$  $\mathbf{B} =$

Definice. Řekneme, že prvek $a \in A$ je v $(A, \leq)$

- *největší*, pokud pro každé $b \in A$ platí $b \leq a$;
- *nejmenší*, pokud pro každé $b \in A$ platí $b \geq a$;
- *maximální*, pokud neexistuje žádné $b \in A$ takové, že $b > a$;
- *minimální*, pokud neexistuje žádné $b \in A$ takové, že $b < a$.

Příklady.

- Uspořádaná množina **A** má jeden největší prvek, jeden maximální (ten samý), žádný nejmenší a dva minimální prvky.
- Uspořádaná množina **B** má jeden největší (a zároveň maximální) a jeden nejmenší (a zároveň minimální) prvek. Je to lineární uspořádání.
- Uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ i $(\mathbb{N}, |)$ mají nejmenší prvek 1, ale žádný maximální prvek.
- Uspořádaná množina $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ má za minimální prvky právě všechna prvočísla.

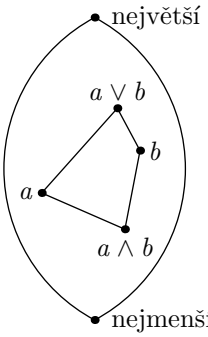
Definice. Nechť $B \subseteq A$. Řekneme, že prvek $a \in A$ je v $(A, \leq)$

- *horní mez* množiny B, pokud $a \geq b$ pro každý prvek $b \in B$;
- *supremum* množiny B, pokud to je nejmenší horní mez B; značí se $a = \sup B$;
- *dolní mez* množiny B, pokud $a \leq b$ pro každý prvek $b \in B$;
- *infimum* množiny B, pokud to je největší dolní mez B; značí se $a = \inf B$.

Příklady.

- V uspořádané množině **A** podmnožina sestávající z obou minimálních prvků nemá supremum ani infimum. Infimum proto, že nemá ani žádnou dolní mez. Horní meze sice tato podmnožina má tři, avšak žádná z nich není nejmenší.
- V každé lineárně uspořádané množině má každá neprázdná *konečná* podmnožina supremum i infimum, přičemž $\sup B = \max B$ a $\inf B = \min B$. Pro nekonečné to existovat nemusí, např. $\sup \mathbb{N}$ v $(\mathbb{N}, \leq)$.
- V uspořádané množině $(P(X), \subseteq)$ má každá podmnožina infimum i supremum, přičemž $\inf B$ je rovno průniku všech množin z B a $\sup B$ je rovno sjednocení všech množin z B.
- V uspořádané množině $(\mathbb{N}, |)$ má každá *konečná* podmnožina infimum i supremum, přičemž $\inf B$ je rovno NSD všech čísel z B a $\sup B$ je rovno NSN všech čísel z B. Na druhou stranu, např. supremum množiny všech prvočísel neexistuje.

Definice. Uspořádanou množinu nazveme *svazově uspořádanou*, pokud v ní existují suprema a infima všech *dvouprvkových* podmnožin (indukcí je snadné dokázat,



Obrázek 8. Průsek a spojení ve svazově uspořádané množině

že pak existují i suprema a infima všech *neprázdných konečných* podmnožin). Nazveme ji *úplně svazově uspořádanou*, pokud existují suprema a infima všech podmnožin. Ve svazově uspořádaných množinách obvykle značíme zkráceně

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \quad \text{a} \quad a \wedge b = \inf\{a, b\},$$

symboly $\vee, \wedge$ čteme jako *spojení* a *průsek*.

Z definice plyne, že v úplně svazově uspořádané množině existuje nejmenší i největší prvek, jsou jimi $\sup \emptyset$, resp. $\inf \emptyset$.

Příklady.

- Lineárně uspořádáné množiny jsou vždy svazově uspořádané, $a \vee b = \max(a, b)$, $a \wedge b = \min(a, b)$. Úplně svazově uspořádané být nemusí, příkladem je $(\mathbb{N}, \leq)$.
- $(P(X), \subseteq)$ je úplně svazově uspořádaná množina, pro $U \subseteq P(X)$ je $\sup U = \bigcup_{A \in U} A$, $\inf U = \bigcap_{A \in U} A$.
- $(\mathbb{N}, |)$ je svazově uspořádaná množina (ne úplně): $a \vee b = \mathrm{NSN}(a, b)$, $a \wedge b = \mathrm{NSD}(a, b)$.

K ověření, zda je dané uspořádání úplně svazové, stačí ověřit pouze existenci infim, anebo pouze existenci suprem.

Tvrzení 14.1. *Uspořádaná množina, ve které existují infima všech podmnožin, je úplně svazově uspořádaná. Uspořádaná množina, ve které existují suprema všech podmnožin, je úplně svazově uspořádaná.*

Důkaz. Označme danou uspořádanou množinu $(A, \leq)$. Z definice suprema plyne, že

$$\sup B = \inf\{a \in A : \ a \geq b \text{ pro každé } b \in B\},$$

tedy suprema lze definovat pomocí infim. Duálně, $\inf B = \sup\{a \in A : \ a \leq b$ pro každé $b \in B\}$. □

Pro některé algebraické konstrukce se hodí *Zornovo lemma*. Jde o jednu z forem tzv. *axiomu výběru*, jednoho ze základních axiomů teorie množin. Zornovo lemma se proto nedokazuje, nýbrž postuluje. *Řetězcem* v částečně uspořádané množině rozumíme podmnožinu, která je lineárně uspořádaná.

Axiom 14.2 (Zornovo lemma)**.** *Buď $(X, \leq)$ neprázdná částečně uspořádaná množina. Předpokládejme, že každý řetězec má horní mez. Pak $(X, \leq)$ obsahuje aspoň jeden maximální prvek.*

Na závěr si vyjasníme, jak to je s izomorfismem uspořádaných množin. Buď $(A, \leq)$ a $(B, \preccurlyeq)$ dvě uspořádané množiny. Zobrazení $\varphi : A \to B$ nazveme *monotónní*, pokud pro každé $a, b \in A$ platí

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad \varphi(a) \preccurlyeq \varphi(b).$$

Zobrazení φ nazveme izomorfismem těchto uspořádaných množin, je-li bijektivní a obě zobrazení φ, φ^{-1} jsou monotónní. Složení monotónních zobrazení je monotónní, ale pozor, inverz monotónní bijekce nemusí být monotónní: příkladem je identické zobrazení $x \mapsto x$ mezi uspořádanými množinami $(\mathbb{N}, |)$ a $(\mathbb{N}, \leq)$, které je monotónní pouze v jednom směru ($a \mid b$ implikuje $a \leq b$, ale nikoliv naopak).

14.2. **Svazy a Booleovy algebry.**

Na svazově uspořádané množiny lze pohlížet dvěma způsoby: jako na uspořádané množiny, kde má každá dvojice prvků supremum i infimum, ale také jako na algebraické struktury s dvěma binárními operacemi suprema a infima. Vlastnosti suprem a infim lze popsat abstraktně, pomocí jisté sady axiomů.

Definice. Algebraická struktura $(A, \wedge, \vee)$ s dvěma binárními operacemi se nazývá *svaz*, pokud platí následující podmínky pro všechna $a, b, c \in A$:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \quad a \wedge b = b \wedge a, \quad a \wedge a = a,$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad a \vee b = b \vee a, \quad a \vee a = a,$$
$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a \qquad \text{(tato podmínka se nazývá } \textit{absorpce}\text{)}.$$

Tvrzení 14.3 (svazy jako algebry vs. uspořádání)**.**

(1) *Je-li* $(A, \leq)$ *svazově uspořádaná množina, pak je struktura* $(A, \inf, \sup)$ *svazem.*

(2) *Je-li struktura* $(A, \wedge, \vee)$ *svazem a definujeme-li* $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$*, pak je* $(A, \leq)$ *svazově uspořádanou množinou.*

Důkaz. (1) Ověříme axiomy svazů. Je snadné (byť trochu pracné) ověřit, že $(a \wedge b) \wedge c = \inf\{a, b, c\} = a \wedge (b \wedge c)$. Očividně $a \wedge b = \inf\{a, b\} = b \wedge a$ a $a \wedge a = \inf\{a, a\} = a$. Analogická tvrzení platí pro $\vee$ a sup. Dále $a \wedge (a \vee b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\} = a$, neboť $a \leq \sup\{a, b\}$, a analogicky ověříme druhou absorpční podmínku.

(2) Reflexivita plyne z toho, že $a \wedge a = a$. Tranzitivita: pokud $a \leq b \leq c$, tedy $a \wedge b = a$ a $b \wedge c = b$, pak $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, čili $a \leq c$. Antisymetrie: pokud $a \leq b$ a $b \leq a$, pak $a = a \wedge b = b \wedge a = b$.

Dokážeme existenci infim, a to tak, že $\inf\{a, b\} = a \wedge b$. Předně $a \wedge b$ je dolní mezí obou prvků, neboť $(a \wedge b) \wedge a = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$, a analogicky pro b. Dále, je-li $c \leq a, b$ jiná dolní mez, pak $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge c = c$, tedy $c \leq a \wedge b$.

Nyní si všimněte, že podmínku $a \leq b$ lze ekvivalentně vyjádřit jako $a \vee b = b$: pokud $a \wedge b = a$, z absorpce plyne $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$; a naopak, pokud $a \vee b = b$, z absorpce plyne $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$.

Pomocí tohoto pozorování je snadné dokázat existenci suprem, a to tak, že $\sup\{a, b\} = a \vee b$: použijeme stejný argument jako pro infima s operací $\vee$ místo $\wedge$. □

Více o svazech najdete v libovolné učebnici univerzální algebry.

Jedním ze základní algebraických nástrojů matematické logiky jsou Booleovy algebry. Uvažujme logické hodnoty T, F. Pokud interpretujeme $\wedge$ a $\vee$ jako konjukci a disjunkci, dostaneme svaz, a spolu s negací ještě mnohem bohatší strukturu.

Definice. Algebraická struktura $(A, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ s dvěma binárními operacemi $\wedge, \vee$, unární operací $'$ a konstantami $0, 1$ se nazývá *Booleova algebra*, pokud platí následující podmínky pro všechna $a, b, c \in A$:

- $(A, \wedge, \vee)$ je svaz,
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (*distributivita*),
- $a \wedge 0 = 0$, $a \vee 1 = 1$,
- $a \wedge a' = 0$, $a \vee a' = 1$.

Z axiomů je snadné odvodit další užitečné vlastnosti:

- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (*duální distributivita*),
- $(a')' = a$, $0' = 1$, $1' = 0$,
- $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ a $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ (*de Morganovy zákony*).

Důkazy si čtenář provede snadno sám.

Příklad. Základním příkladem Booleovy algebry je množinová algebra

$$(P(X), \cup, \cap, {}^{-}, \emptyset, X),$$

s operacemi průniku, sjednocení a doplňku množin ($\bar{A} = X \setminus A$).

Není těžké dokázat, že každá konečná Booleova algebra je izomorfní některé množinové algebře. Nekonečných Booleových algeber existuje spousta různých typů.

Příklad. Jak jsme již zmínili, pravdivostní hodnoty T, F spoly s operacemi konjunkce, disjunkce a negace tvoří Booleovu algebru $(\{T, F\}, \wedge, \vee, \neg, F, T)$. Tato algebra se váže k základní výrokové logice.

Uvažujme nyní obecnou teorii $\mathcal{T}$ v jazyce L (například teorii grup či Peanovu aritmetiku). Označme $\mathcal{F}_L$ množinu všech formulí v jazyce L. Dvě formule φ, ψ nazveme $\mathcal{T}$-ekvivalentní, pokud lze v teorii $\mathcal{T}$ dokázat ekvivalenci $\varphi \leftrightarrow \psi$. Uvažujme množinu $\mathcal{F}_\mathcal{T}$, do které dáme z každé třídy ekvivalence po jedné formuli. Tzv. *Lindenbaumova algebra* teorie $\mathcal{T}$ bude Booleova algebra $(\mathcal{F}_\mathcal{T}, \wedge, \vee, \neg, F, T)$.

Lindenbaumovy algebry měří neúplnost dané teorie: pokud je každá formule z axiomů dokazatelná či vyvratitelná, $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ bude mít pouze dva prvky, v opačném případě jich bude víc (jako třeba pro Peanovu aritmetiku, jak říká Gödelova věta o neúplnosti).

Více o teorii a použití Booleových algeber najdete ve většině učebnic logiky či teorie množin. Jiným myšlenkovým směrem jsou pak neklasické logiky, které vycházejí ze zobecnění Booleových algeber.