- J akcií ... ρ_j ... náh. výnosnost za období

$E\rho = r$

$\mathrm{var}\,\rho = V$

x_j ... váha investice do j-té akcie ... $\sum_{j=1}^{J} x_j = 1$

kladná váha: na začátku akcii koupím, na konci prodám

záporná —||—: —||— prodám —||— koupím

- výnos portfólia s váhami x: $r(x) = \sum_j r_j x_j = r^T x = E(\rho^T x)$

riziko portfólia s váhami x: $\sigma^2(x) = \mathrm{var}(\rho^T x) = x^T V x$

- náš cíl: najít portfólio x, tak, že $r(x) \to \max$ & $\sigma^2(x) \to \min$

$\Rightarrow$ EFICIENTNÍ PORTFÓLIO - Def:

Portfólio s váhami x^* je eficientní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu (mean-efficient-variance) jestliže neexistuje žádné jiné x takové, že $\sum x_j = 1$, pro které je výnos $r(x) \geq r(x^*)$ & $\sigma^2(x) \leq \sigma^2(x^*)$ a aspoň jedna z nerovností je ostrá. ($\nexists$ žádné lepší portfólio)

- Jak najít eficientní portfólia?

parametr

$$\max_{x \in X} \lambda r^T x - \frac{1}{2} x^T V x \quad , \text{ kde } X = \{x : 1^T x = 1\} \; , \lambda \geq 0$$

není kompaktní (neomezená)

$\lambda \geq 0$: max výnosu minimalizace rozptylu

- $\lambda = 0$: investora nezajímá výnos, pouze minimalizuje riziko
- $\lambda \to \infty$: investora nezajímá riziko, chce maximalizovat výnos
- problém s nastavením λ (každý, kdo má jaké)
- souhrnný přístup: $\forall$ kritéria dohromady

$\min_{x \in X} x^T V x$ - úloha kvadratického programování

za podmínek $r^T x \geq \mu$

- hýbu s μ $\to$ dostávám různá eficientní portfólia (totožná s přístupem 1.)

- výhoda: jasně nastavitelné μ
- pokud X kompaktní $\Rightarrow$ μ je z ~~určitého~~ intervalu

$$\max_{x \in X} r^T x$$

za podmínky: $x^T V x \leq v$

- v ... daná mez (regulátor, EU, ...)

- řešíme: $\min \frac{1}{2} x^T V x$ — kvadratická fce

za podmínek: $\mathbb{1}^T x = 1$ — lineární fce

$r^T x \geq \mu$

- Lagrangova fce: (Dupačová, Hurt, Štěpán 9.2.4.)

$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} x^T V x + \lambda_1 (\mathbb{1}^T x - 1) + \lambda_2 (\mu - r^T x)$

- předpoklady: 1) žádné bezrizikové aktivum (později)
  investujeme do ní ⇒ irelevantní
  3) r není stejný pro všechny akcie → vybereme akcii s výnosem a
  2) V je regulární nedokážeme replikovat 1 akcii pomocí jiných akcií
- a) portfólio s minimálním rozptylem: $\min_{x \in X} \frac{1}{2} x^T V x$

$\rightarrow L(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T V x + \lambda (1 - \mathbb{1}^T x)$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = V x + \lambda \cdot \mathbb{1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda \cdot \mathbb{1} = + V x$$

$$x = V^{-1} \lambda \cdot \mathbb{1}$$

$\mathbb{1}^T x = 1$

dosadit $\mathbb{1}^T V^{-1} \lambda \mathbb{1} = 1$

číslo

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}} \Rightarrow x^*_\sigma = \frac{V^{-1} \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}}$$

$$\sigma^2(x^*) = x^{*T} V x^* = \frac{\mathbb{1}^T V^{-1} V V^{-1} \mathbb{1}}{(\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1})^2} = \frac{1}{(\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1})}$$

$$r(x^*) = r^T x^* = \frac{r^T V^{-1} \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}}$$

b) zpět k celé úloze

pro ep. 3

$$\frac{\partial L}{\partial x} = V x - \lambda_1 \mathbb{1} - \lambda_2 r \stackrel{!}{=} 0$$

$$x^* = \lambda_1 \cdot V^{-1} \mathbb{1} + \lambda_2 \cdot V^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

- zaveďme značení: $A = \mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1} > 0$

  $B = \boldsymbol{\mu}^T V^{-1} \mathbb{1}$

  $C = \boldsymbol{\mu}^T V^{-1} \boldsymbol{\mu} > 0$

  $\Delta = AC - B^2 > 0$ (Schwarzova nerovnost)

- $\mathbb{1}^T \lambda_1 V^{-1} \mathbb{1} + \mathbb{1}^T \cdot \lambda_2 \cdot V^{-1} \boldsymbol{\mu} = 1$ dosazení do $\mathbb{1}^T x = 1$

$$A \cdot \lambda_1 + B \lambda_2 = 1$$

musí být rovnost ⇓ extrém na hranici

$$\boldsymbol{\mu}^T \lambda_1 V^{-1} \mathbb{1} + \boldsymbol{\mu}^T \lambda_2 V^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mu$$ dosazení do $\boldsymbol{\mu}^T x = \mu$

$$B \cdot \lambda_1 + C \cdot \lambda_2 = \mu$$

$$\lambda_1 = \frac{C - \mu B}{\Delta} \; ; \; \lambda_2 = \frac{\mu A - B}{\Delta}$$

1) když $B = 0$: $\lambda_1 = \frac{C}{\Delta} = \frac{\cancel{C}}{A \cdot \cancel{C}} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}}$

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cdot \cancel{A}}{\cancel{A} \cdot C} = \frac{\mu}{C} = \frac{\mu}{\boldsymbol{\mu}^T V^{-1} \boldsymbol{\mu}}$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{V^{-1} \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}} + \frac{V^{-1} \boldsymbol{\mu}\, \mu}{\boldsymbol{\mu}^T V^{-1} \boldsymbol{\mu}}$$

~~bezrizikové~~ s minimálním rizikem korekce členu ●

$$\boldsymbol{\mu}^T x^* = \frac{B}{A} + \mu \cdot \frac{\cancel{C}}{\cancel{C}}$$ $B = 0 \Rightarrow E\varrho = \mu$

skalár

2) když $B \neq 0$: $x^* = \underbrace{\boxed{\frac{C - \mu B}{\Delta} \cdot A}}_{\delta_1(\mu)} \frac{V^{-1} \mathbb{1}}{\mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}} + \underbrace{\boxed{\frac{\mu A - B}{\Delta} \cdot B}}_{\delta_2(\mu)} \frac{V^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbb{1}^T V^{-1} \boldsymbol{\mu}}$

$\boldsymbol{\mu}^T V^{-1} \mathbb{1}$?!

- $\delta_1(\mu) + \delta_2(\mu) = \frac{CA - \cancel{\mu BA} + \cancel{\mu AB} - B^2}{\cancel{\Delta}} = 1$

„Věta o dvou fondech"

$$x^* = \delta_1(\mu) \cdot x^1 + \delta_2(\mu) \cdot x^2$$

• $r(x^*) = \delta_1(\mu)\cdot\frac{B}{A} + \delta_2(\mu)\cdot\frac{C}{B} = \frac{C-\mu B}{\Delta}\cdot\frac{A\cancel{B}}{\cancel{A}} +$

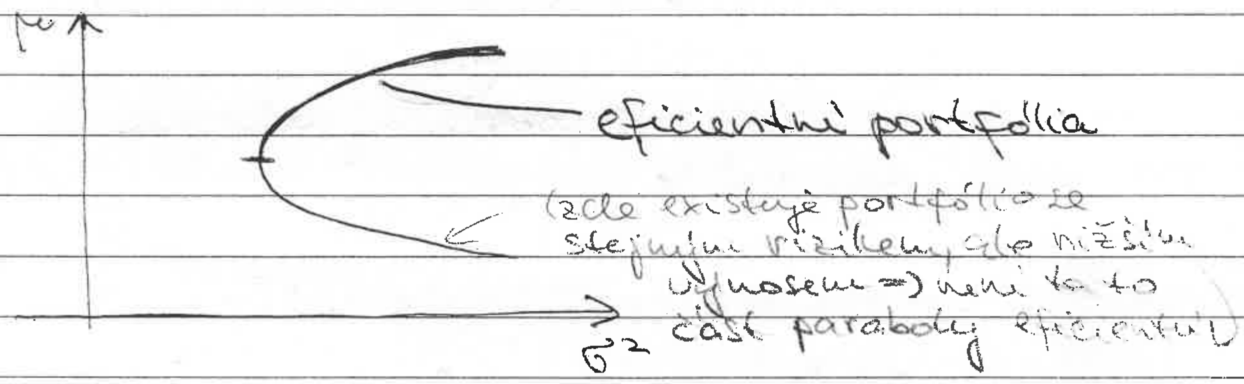
$+ \frac{\mu A - B}{\Delta}\cdot\frac{\cancel{B}\cancel{C}}{\cancel{B}} = \frac{-\mu B^2 + \mu AC}{\Delta} = \underline{\underline{\mu}} \quad (AC - B^2 = \Delta)$

• $\sigma^2(x^*) = x^{*T} V x^* = (\lambda_1 V^{-1}\mathbb{1} + \lambda_2 V^{-1} r)^T \cdot V \cdot (\lambda_1 V^{-1}\mathbb{1} + \lambda_2 V^{-1} r) =$

$= \lambda_1^2 \cdot \mathbb{1}^T V^{-1}\mathbb{1} + 2\cdot\lambda_1\lambda_2 \cdot V^{-1} r + \lambda_2^2\, r^T V^{-1} r = \lambda_1^2 A + 2\lambda_1\lambda_2 B + \lambda_2^2 C =$

$= \lambda_1\underbrace{(\lambda_1 A + \lambda_2 B)}_{1} + \lambda_2\underbrace{(\lambda_1 B + \lambda_2 C)}_{\mu} = \lambda_1 + \lambda_2\cdot\mu =$

$= \frac{C-\mu B}{\Delta} + \frac{\mu A - B}{\Delta}\cdot\mu = \underline{\underline{\frac{1}{\Delta}(A\cdot\mu^2 - 2B\mu + C)}}$



• eficientní portfólio $x^* = \delta_1 x^1 + \delta_2^* x^2$

$x^1 = \frac{V^{-1}\mathbb{1}}{\mathbb{1}^T V^{-1}\mathbb{1}}$ s minimálním rozptylem, $x^2 = \frac{V^{-1} r}{\mathbb{1}^T V^{-1} r}$

x^2 je portfólio, které maximalizuje Sharpův poměr:

$\frac{\mu_p^2}{\sigma_p^2} = \frac{(r^T x)^2}{x^T V x} \to \max_{\mathbb{1}^T x = 1} \; \ldots \; x^* = x^2$

• Schwarzova nerovnost: $(r^T x)^2 = (r^T V^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} x)^2 \le \underbrace{(r^T V^{-1} r)}_{C}\cdot(x^T V x)$

$\Rightarrow x^* = \lambda V^{-1} r$ & $\mathbb{1}^T x^* = 1 \Rightarrow x^* = \frac{V^{-1} r}{\mathbb{1}^T V^{-1} r}$