Markowitzův model s bezrizikovým aktivem

- ozn. $A = \mathbb{1}^T V^{-1} \mathbb{1}$ $\quad C = r^T V^{-1} r$

  $B = \mathbb{1}^T \cdot V^{-1} r$ $\quad D = A \cdot C - B^2$

- portfólio s minimálním rozptylem: $r_0 = B/A$
  a proto předpokládáme $r_0 < B/A$ výnos bezrizikového aktiva

- $\tilde{\rho} = (r_0, \rho)$ $\quad$ var $\tilde{\rho} = \tilde{V}$, $E\tilde{\rho} = (r_0, r)$

  $\tilde{x} = (x_0, x)$

předp.: $\mu > r_0$

$\Rightarrow$ formulace modelu: $\min \frac{1}{2} \tilde{x} \tilde{V} \tilde{x}$

$$\text{za } \mathbb{1}^T \tilde{x} = 1 \iff \mathbb{1}^T x + x_0 = 1$$

$$x_0 \cdot r_0 + r^T x \geq \mu$$

$\rightarrow x_0 = 1 - \mathbb{1}^T x \rightarrow (1 - \mathbb{1}^T x) \cdot r_0 + r^T x = \mu$

$$(r - r_0 \cdot \mathbb{1})^T \cdot x = \underbrace{\mu - r_0}_{\text{požadovaný nadvýnos}} = \mu_e$$

Tedy máme: $\min \frac{1}{2} x^T V x$

$$\text{za } (r - r_0 \cdot \mathbb{1})^T \cdot x = \mu_e$$

$\rightarrow$ řešení: $L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \cdot x^T V x + \lambda \cdot (\mu_e - (r - r_0 \cdot \mathbb{1})^T x)$

gradient $\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = Vx + \lambda \cdot (-r + r_0 \cdot \mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$ $\quad$ Kdyby $\lambda = 0 \rightarrow x = 0$ ↯

$x^* = \lambda \cdot V^{-1}(r - r_0 \cdot \mathbb{1})$ $\quad$ kolik investujeme do rizikového aktiva

$x_0^* = 1 - \mathbb{1}^T x^*$ $\quad$ — " — bezrizikového aktiva

$(r - r_0 \cdot \mathbb{1})^T \cdot x^* = \mu_e = (r - r_0 \cdot \mathbb{1})^T \cdot \lambda \cdot V^{-1}(r - r_0 \cdot \mathbb{1}) = \lambda \cdot (C - 2Br_0 + r_0^2 A)$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\mu_e}{C - 2Br_0 + A \cdot r_0^2}$$

$$\boxed{x^* = \frac{(\mu - r_0) \cdot V^{-1}(r - r_0 \cdot \mathbb{1})}{C - 2B \cdot r_0 + A \cdot r_0^2}} \; ; \; x_0^* \overset{\parallel\; 1 - \mathbb{1}^T x^*}{=} 1 - \frac{(\mu - r_0)(B - r_0 \cdot A)}{C - 2B \cdot r_0 + A \cdot r_0^2}$$

- Věta o 2 fondech: $\tilde{x}^* = \delta \tilde{x}^1 + (1 - \delta) \tilde{x}^2$

$\Rightarrow$ důkaz:

$\tilde{x}^1 = (1, 0, \dots, 0)$

$\tilde{x}^2 = (0, x^+)$

↑ bezriziková složka

$$\delta = 1 - \frac{(\mu - r_0)(B - r_0 \cdot A)}{C - 2B \cdot r_0 + A \cdot r_0^2}$$

$$\longrightarrow 1 - \delta = \frac{(\mu - r_0)\cdot(B - r_0 \cdot A)}{C - 2B \cdot r_0 + A \cdot r_0^2}$$

když vynásobím $(1-\delta)\, x^t$, musím dostat x^*

$$x^t = V^{-1}\cdot(r - r_0 \cdot \mathbb{1})$$

– tangenciální (tečné) portfolio

$x^* / (1-\delta)\ B - r_0 \cdot A$

(δ nemusí ležet z $(0,1)$)

– výnos $\tilde{x}^*$: $r^T \tilde{x}^* = \mu$ (tak jsme to chtěli)

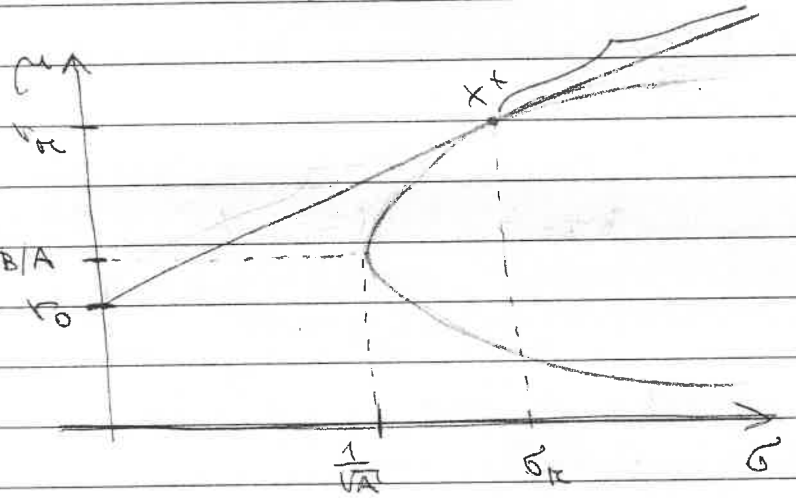
rozptyl portfólia $\tilde{x}^*$:

$$\mathrm{var}(\tilde{\rho}^T \cdot \tilde{x}^*) = \mathrm{var}(r_0 \cdot x_0 + \rho^T x^*) = \mathrm{var}(\rho^T x^*) = x^{*T} \cdot V \cdot x^* =$$

$$= \left(\frac{\mu - r_0}{C - 2B \cdot r_0 + A \cdot r_0^2}\right)^2 \cdot (r - r_0 \cdot \mathbb{1})^T \cdot \cancel{V^{-1}} \cdot \cancel{V} \cdot V^{-1} \cdot (r - r_0 \cdot \mathbb{1}) =$$

$$= \left(\frac{\mu - r_0}{C - 2B \cdot r_0 + \cancel{A \cdot r_0^2}}\right)^2 \cdot \cancel{(C - 2B r_0 + A \cdot r_0^2)} = \frac{(\mu - r_0)^2}{C - 2B \cdot r_0 + A \cdot r_0^2}$$

$$\sigma(\tilde{\rho}^T \cdot \tilde{x}^*) = \frac{\mu - r_0}{\sqrt{A \cdot r_0^2 - 2B \cdot r_0 + C}}$$



kdybychom si nemohli půjčit za bezrizikovou míru: úsečka (r_0, x_t) a dále oblouk (ne přímka)

nakrátko prodám bezrizikové, za všechno co mám nakoupím tang.

půjčka za bezrizikovou úr. míru

Tržní portfólia

- $r(x)$ ... výnos portfólia x, které je eficientní
  $\sigma(x)$ ... směr. odchylka ——— " ———
  r_π ... výnos tržního portfólia
  σ_π ... směr. odchylka —— " ——
- $$\frac{r(x) - r_0}{r_\pi - r_0} = \frac{\sigma(x)}{\sigma_\pi}$$

$$\boxed{r(x) = r_0 + \frac{\sigma(x)}{\sigma_\pi}(r_\pi - r_0)}$$ CML přímka (capital market line)

- pro eficientní portfólio platí: $\underbrace{\frac{r(x) - r_0}{\sigma(x)}}$ $= \frac{r_\pi - r_0}{\sigma_\pi}$

modifikovaný Sharpeův poměr

  • pro $\forall$ eficientní portfólia přímka stejná

- výnos tangenciálního portfólia: $\mu_t = r^T \cdot x^t$
- kovariance výnosu aktiv s výnosem tang. portfólia:

$$\bar{\sigma}_t = cov(\rho, \rho^T \cdot x^t) = V \cdot x^t = \frac{r - r_0 \cdot \mathbb{1}}{B - r_0 A}$$

- rozptyl tangenciálního portfólia:

$$\sigma_t^2 = x^{tT} \cdot V \cdot x^t = \frac{(r - r_0 \mathbb{1})^T \cdot V^{-1} \cancel{\cdot V}}{B - r_0 \cdot A} \cdot \frac{V^{-1}(r - r_0 \cdot \mathbb{1})}{B - r_0 \cdot A} = \frac{C - 2B r_0 + r_0^2 A}{(B - r_0 \cdot A)^2} = \frac{\mu_t - r_0}{B - r_0 \cdot A}$$

$$r - r_0 \cdot \mathbb{1} = \frac{\bar{\sigma}_t}{\sigma_t^2}(\mu_t - r_0)$$

- tržní portfólio: $\tilde{x}_\pi = \delta_\pi \cdot \tilde{x}^1 + (1 - \delta_\pi) \cdot \tilde{x}^2$
  výnos tržního: $\mu_\pi = \delta_\pi \cdot r_0 + (1 - \delta_\pi) \cdot \mu_t$
  rozptyl tržního: $\sigma_\pi^2 = (1 - \delta_\pi)^2 \cdot \sigma_t^2$
  kovariance tržního: $\bar{\sigma}_\pi = cov(\rho, \rho^T x_\pi) = (1 - \delta_\pi) \cdot V \cdot x^t = (1 - \delta_\pi) \cdot \bar{\sigma}_t$

$$\Rightarrow r - r_0 \mathbb{1} = \frac{\bar{\sigma}_\pi}{\sigma_\pi^2}(\mu_\pi - r_0)$$

• rozpis po složkách pro n-té aktivum (akcii): $\boxed{r_n - r_0 = \beta_n (\mu_\pi - r_0)}$

$\beta_n = \bar{\sigma}_{n\pi} / \sigma_\pi^2$ (upravená) SML (security market line)

$\beta \in (0,1)$ ... méně rizikové než tržní

$\beta > 1$ ... více — || —

• v praxi nevyvážená SML přímka: $\boxed{r_\pi - r_0 = \alpha_\pi + \beta_\pi (\mu_\pi - r_0)}$

α, β odhadujeme regresí; α by mělo být 0

$\Rightarrow$ CAPM model

Kvantifikace rizika

krátká pozice ne více než náš kapitál

1) $X = \{x : 1^T x = 1\} \to X = \{x : 1^T x = 1, x \geq -1\}$ omezené krátké prodeje

$\{x : 1^T x = 1, x \geq 0\}$ vyloučené — || —.

2) rozptyl není vhodná míra rizika

• dvě investice $1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -3 \quad ; \quad -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; 3$

mají stejný rozptyl, ale -3 větší ztráta než $-1 \Rightarrow$ rizikovější

• výnos $0, 10$ s pravd. $1/2$ $\Rightarrow \uparrow\uparrow$ rizikovější při

$-1, 0$ s pravd. $1/2$ použití rozptylu

• problém: rozptyl je symetrická míra rizika

3) $\sigma(x^T \rho) \leq x^T \cdot \sigma(\rho)$

• v Markowitzově modelu nemusí toto platit

$\Rightarrow$ všechno kritiky Markowitzova modelu

- měření rizika:

• dluhopisy - durace

• deriváty - řecká písmena

• kritérium očekávaného užitku

7) Roy (1952) náhodný výnos potřebuji znát přesné rozdělení $\Rightarrow$ např. normální

$\max_{x \in X} P[\rho^T x \geq r_p]$

• předpoklad normality: $\rho \sim N(r, V) \Rightarrow \rho^T x \sim N(r^T x, x^T V x)$

$$\Rightarrow P[\rho^T x \geq r_p] = P\left[\frac{\rho^T x - r^T x}{\sqrt{x^T V x}} \geq \frac{r_p - r^T x}{\sqrt{x^T V x}}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{r_p - r^T x}{\sqrt{x^T V x}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{r^T x - r_p}{\sqrt{x^T V x}}\right)$$

symetrie norm. roz. v nule