- Rozložitelnost matice A:
  - **Def 9.2:** Nezáporná čtvercová matice je <u>rozložitelná</u> (= <u>reducibilní</u>), jestliže $\exists$ ~~nezáporná~~ neprázdná podmnožina $J$ množiny všech indexů $\{1, \dots, n\}$ taková, že $a_{ij} = 0 \;\forall i \notin J, j \in J$. Matice je <u>nerozložitelná</u>, když není rozložitelná.

matice 0 a 1

  - **Důsledek:** rozložitelnost $\Leftrightarrow \exists$ permutační matice $T$:

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

lze přerovnat pořadí vrcholů

z vrcholů j-tého vycházejí se vyjmenovaní již nepovažovaní

## TEORIE HER

- modelování konfliktních situací
- hledá nejlepší rozhodnutí
- aplikuje se nejčastěji v ekonomii, politice, …
- teorie nekooperativních her - každý proti každému
- teorie kooperativních her - koalice
- hra: $N$ … hráčů

  $X = X_1 \times \dots \times X_N$ … množina strategií

  ↳ $X_1$ … množina strategií 1. hráče

  $f_i(x_1, \dots, x_N)$ … výplatní fce $f_i : X \to \mathbb{R}$ pro $i$-tého hráče, $i = 1, \dots, N$

  (a ne $f_i : X_i \to \mathbb{R}$ - protože záleží i na rozh. druhých soupeřů)
- dělení podle počtu hráčů
  - hra 2 hráčů
  - hra $N$ hráčů
- — " — výplaty
  - hra s konstantním (nulovým) součtem
  - hra s ne — " — součtem

  tj. $\sum_{i=1}^{N} f_i(x_1, \dots, x_N)$ je konstantní
- dělení podle dynamiky
  - statické (jednokolové)
  - dynamické (spec. evoluční) ↳ hráči se učí na základě …
- dělení podle inteligence hráčů
  - P-inteligentní hráč - s pstí 1 pro hráče rozhoduje …

nelze vyhovět
každému -
protichůdné

# TEORIE NEKOOPERATIVNÍCH HER

- hra $N$ hráčů - nekooperující, každý chce max. výplatu
- rovnovážný bod (strategie): Nashova rovnováha (1951)
  - strategie $(x_1, \dots, x_N)$ je NRB (= Nashův rovnovážný bod), jestliže $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ platí: $f_i(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) \geq f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$ $\forall y_i \in X_i$
  - pokud $>$ $\forall y_i \neq x_i$ … silný NRB
    pokud alespoň jedna $=$ … slabý NRB
    ostatní zůstanou u svých strategií, i-tý hráč si nemůže polepšit ⇒ NRB i-tého hráče ⇒ platí $\forall i$ ⇒ NRB
- nedominovanost - efektivita
  - strategie $(x_1, \dots, x_N)$ je nedominovaná (efektivní), jestliže neexistuje žádná $(y_1, \dots, y_N) \in X$ taková, že $f_i(x_1, \dots, x_N) \leq f_i(y_1, \dots, y_N)$ $\forall i \in \{1, \dots, N\}$
- NRB nemusí být nedominovaný

Př: Vězňovo dilema

| | | Vězeň 2 | |
|---|---|---|---|
| | | zradí | nezradí |
| Vězeň 1 | zradí | -8 \| -8 | 0 \| -10 |
| | nezradí | -10 \| 0 | -1 \| -1 |

V1 V2 vždy

- strategie (Z, Z): je NRB - ani jednomu hráči se nevyplatí změnit strategii a nezradit, ale není nedominovaná strategie - (N, N) dominuje (Z, Z)
- strategie (N, N): V1 zafixuje, že nezradí ⇒ druhý hráč změní strategii a dostane 0 místo -1 ⇒ není NRB (a přitom dominuje NRB (Z, Z))!

Př:

| | | H2 | |
|---|---|---|---|
| | | S1 | S2 |
| H1 | S1 | 0 \| 1 | 3 \| 2 |
| | S2 | 1 \| 0 | 2 \| 3 |

(S1, S2): H1 zahraje S1, tj. fixuje, H2 se rozhoduje mezi S1 a S2 - H2 se nevyplatí přejít k S1

- H2 zahraje S2, H1 zahraje S1
  fixujeme

⇒ NRB

(S2, S2): není NRB ($H_1$ zafixuje S2, $H_1$ se vyplatí S1)

PF:

| | | $H_2$: S1 | S2 |
|---|---|---|---|
| $H_1$ | S1 | 2\|1 | 2\|0 |
| | S2 | 3\|0 | +1\|+1 |

nemá NRB

⇒ ne každá hra má NRB!

- čisté strategie: NRB zde nemusí existovat
⇒ smíšené strategie: pstní rozdělení na čistých strategiích max: ∃ vždy alespoň 1 NRB

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \| (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

TEORIE KOOPERATIVNÍCH HER

- vytváření koalic $S \subseteq \{1, .., N\}$ ($S \subseteq N$) $N = \{1, ..., N\}$
- charakteristická fce $v$ hry: # možných koalic

Def: Nechť pro fci $v: 2^{N} \to [0, \infty)$, která každé koalici S přiřadí nejnižší možnou výhru, jakou si S může zajistit bez ohledu na ostatní hráče, platí:

i) $v(\emptyset) = 0$

ii) $v$ je (sub?) (super)aditivní, tj. $v(S) + v(K) \leq v(S \cup K)$ pro $\forall S, K \subseteq \{1, .., N\}: S \cap K = \emptyset$. dvě koalice na tom získanou spojení nebo na spojení nejhůře

- výhra koalice v nejhorším možném případě

ii) diskutabilní: spojení „nejlepší" koalice s „horší" ⇒ „nejlepší" musí na spojení tratit

- nikdy nechce hráč vstoupit do koalice (nejvíc získá, když se všichni spojí!) - v rámci přerozdělování uvnitř koalice může získat méně, než když by sám nebo se spojí jen s nějakým jiným

- Každá hra dána $(N, v)$
- rozdělení výplaty koalice S:
- Nechť $x_i$ je výplata i-tého hráče v koalici S

Def: Výplata se nazývá efektivní, když platí:

i) $x_i \geq v(\{i\})$ výplata v koalici ≥ výplatě, kdyby i-tý hráč zůstal sám