NMEK 531 Matematická ekonomie | 10. ... | 5/8

→ Různé koncepty řešení ⇄ stabilní množ., jádro, Shapleyho ... → ...

Kooperativní hry $N=\{1,\dots,n\}$, koalice $S\subseteq N$

Po rozdělení do koalic → nekooperativní hra více hráčů [koaličních]

→ ale efektivní vzhled na jednotlivé hráče

def. [Charakteristická funkce] Řekl. $v: 2^N \to [0,\infty)$, která každé koalici S přiřadí nejvyšší možnou výhru, jakou S může zajistit bez ohledu na to, co udělají ostatní hráči, platí:

(i) $v(\emptyset)=0$

(ii) $\forall S,\tilde S \subseteq N,\ S\cap\tilde S=\emptyset$ platí $v(S)+v(\tilde S) \le v(S\cup\tilde S)$.

v je char. fce koop. hry

jednotlivci nemají vyšší výhru než jejich sdružená koalice

(v,N) → char. koop. hra

$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+}_0$ je výplata, hovoříme o $\underbrace{\text{efektivní výplatě}}_{E(v)}$: (i) $v(\{i\}) \le x_i\ \forall i\in N$

(ii) $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$

[$v(S)+v(S^c)=v(N)\ \forall S\in 2^N$ ... hra s konst. součtem]

def. Výplatní vektor y je dom. x vzhledem ke koalici S ($x \succ_S y$): (i) $x_i>y_i\ \forall i\in S$,

(ii) $\sum_{i\in S} x_i \le v(S)$

Řekneme, že výplatní vektor y je dominován x, existuje-li $S\subseteq N$ tak, že $x\succ_S y$

→ nějaký podmínka než STABILNÍ MNOŽINA

def. [Jádro hry] Jádro hry (v,N) je množina efektivních výplat, které nejsou dominovány žádnou výplatou [$C(v)$] $C(v)\subseteq E(v)$

def. [ekviv.] Jádro je množina všech $x\in\mathbb{R}^n_{+0}$: (i) $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$ (ii) $\forall S\subseteq N$: $\sum_{i\in S} x_i \ge v(S)$ (*)

[$C(v)$ je konvexní polyedr. množina [∩ kon. mnoh. uz. poloprostorů]]

! Ale může být prázdné ⇒ (*) (i) $v(S)-\varepsilon$ $\forall \varepsilon$ ... silné ε jádro; (ii) $v(S)-|S|\cdot\varepsilon$ ... slabé ε jádro def. [Shapleyho hodnota] $\phi_i(v)$ hráče i ve hře (v,N).

přidání hráče i koalici

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} I(i \in S) \cdot \frac{(|S|-1)! \cdot (n-|S|)!}{n!} \left[v(S) - v(S \setminus \{i\}) \right]$$

každému hráči výhru, jakou může očekávat

bohužel často Shapleyho hodnota nemusí ležet v jádře

Příklad: (v,N) $N=\{1,2,3\}$

$v(1)=1$

$v(2)=v(3)=v(2,3)=0$

$v(1,2)=2$

$v(1,3)=v(1,2,3)=3$

Řešení: Jádro dle def. [Bhiv]

Hledáme (x_1,x_2,x_3): $x_1+x_2+x_3=3\,[=v(N)]$

$x_1 \geq 1$, $x_1+x_2 \geq 2$

$x_2 \geq 0$, $x_1+x_3 \geq 3$

$x_3 \geq 0$, $x_2+x_3 \geq 0$

$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_1+x_2 \leq 3,\ x_1+x_2 \geq 2,\ x_2 \leq 0,\ x_1 \leq 3$

$\boxed{x_2=0}$ $1 \leq x_1 \leq 3$ a $\left.\begin{array}{l} x_1+\overset{0}{\boxed{x_2}} \leq 3 \\ x_1+\boxed{x_2} \geq 2 \end{array}\right\}$ $x_1 \in [2,3]$, $x_2=0$, $x_3=3-x_1$

není dominovaná alokace

$C(v)=\{(x,0,3-x) : x \in [2,3]\}$

$\phi(v) = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$, $\phi_2(v) \neq 0 \Rightarrow$ neleží v jádře

z def.

$\Rightarrow$ buď velké $(1,2,3)$ než $\{1,3\}$

2 nemá hráč

Příklad: (v, N), kde $N = \{1,2,3\}$ a $v(1) = v(2) = v(3) = 0$

$v(1,2) = v(1,3) = 1$

$v(2,3) = 2$

$v(N) = 3$

$C(v)$: (x_1, x_2, x_3) takových, že $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \sim x_3 = 3 - x_1 - x_2$

$x_1 \geq 0$, $x_1 + x_2 \geq 1$ | $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 3$

$x_2 \geq 0$, $x_1 + x_3 \geq 1$ | $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_2 \leq 2$, $x_1 \leq 1$

$x_3 \geq 0$, $x_2 + x_3 \geq 2$

$x_1 \in [0,1]$, $x_2 \in [1 - x_1, 2]$ a $x_3 = 3 - x_1 - x_2$

$C(v)$ je tedy konvexním obalem $(1,2,0)$, $(1,0,2)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$

Nejmenší jádro - nejmenší $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takové, aby C_ε bylo neprázdné $\quad$ $[\varepsilon = -1/2] \rightsquigarrow [y_1 \in [1/2, 1/2],\ y_2 \in [1, 3/2],\ y_3 = 3 - y_1 - y_2]$

aby bylo neprázdné: $x_1 \in [v(1) - \varepsilon, v(N) - v(2,3) + \varepsilon]$ - 1 podmínka

$x_2 \in [\max\{v(2), v(1,2) - x_1\} - \varepsilon, v(N) - \max\{v(1,3), v(3) + x_1\} + \varepsilon]$ - 4 podmínky

$x_3 = v(N) - x_1 - x_2$

Def. [těžiště] Buď $C(v)$ je neprázdné jádro hry (v, N). Pak těžiště jádra $c = (c_1, \dots, c_n)$:

$$c_i = \frac{1}{V(C(v))} \int_{C(v)} x_i \, dx_1 \dots dx_n,$$

$$\text{kde } V(C(v)) = \int_{C(v)} 1 \, dx_1 \dots dx_n$$

$n = 3 = N$: $E^3 \to D, u, v$

$x_1 = \frac{v(N)}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{6}}$

$x_2 = \frac{2b}{\sqrt{6}}$

$x_3 = \frac{v(N)}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{6}}$

$a = \sqrt{2}(x_1 + \frac{x_2}{2} - \dots)$, $b = x_2 \frac{\sqrt{6}}{2}$

těžiště jádra je střední hodnotou při R-rozdělení $\rightsquigarrow$ spravedlivost.

$D = \left(\frac{v(N)}{2}, 0, \frac{v(N)}{2}\right)$

$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)(-1, 2, -1)$

T jádra: $(5/9, 11/9, 11/9)$

Nejmenší jádro není těžištěm jádra

Normální hra → Koaliční: definuj $v(S)$ $\forall S \in 2^N$ jako HODNOTU hry dvou hráčů s nulovým součtem, kde koalice S je jeden hráč a $\bar{S} = N \setminus S$ je druhý hráč, výplata pro S: $\sum_{i \in S} f_i(x_1, \dots, x_n)$, tj.:

$$v(S) = Value\Big(\sum_{i \in S} f_i(x_1, \dots, x_n)\Big),$$ kde hráči v S: $x_i, i \in S$; hráči v $\bar{S}$: $y_i, i \notin S$

$$\text{value}(\overset{m \times n}{A}) = \max_p \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$$ → min. max. výhra pro hráče A

(různé def. $v(i)$)

Koaliční → Normální: $X_i = \{S \in 2^N : i \in S\}$, $f_i(S_1, \dots, S_n) = \begin{cases} v(S_i)/|S_i|, & \text{pokud } S_j = S_i \ \forall j \in S_i \\ v(\{i\}), & \text{jinak} \end{cases}$

Příklad: Hra 3 hráčů A, B, C se dvěma strategiemi:

A vybírá 1

B \ C	1	2
1	(0,3,1)	(2,1,1)
2	(4,2,3)	(1,0,0)

A vybírá 2

B \ C	1	2
1	(1,0,0)	(1,1,1)
2	(0,0,1)	(0,1,1)

$\boxed{?\ v}$

Řešení: $v(\emptyset) = 0$, $v(N) \overset{(4,2,3)}{=} 4 + 2 + 3 = 9$

nepotřebujeme

[Saddle point: a_{ij} (i) min v řádku, (ii) max ve sloupci ⇒ je hodnota hry a_{ij}]

? $v(\{1\})$

A \ B,C	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	
1	0,4	2,2	$\boxed{4,5}$	1,0	p
2	1,0	1,2	0,1	0,1	$1-p$

$v(\{1\}) = Value(\overset{2 \times 4}{A}) = 1/2$

$v(\{2\}) = 0$ a $v(\{3\}) = 3/4$ stejně

$v(\{1,3\})$

A,C \ B	1	2
(1,1)	1,3	7,2
(1,2)	3,1	1,0
(2,1)	1,0	1,0
(2,2)	2,1	1,1

min.

$v(\{1,3\}) = Value(\overset{4 \times 2}{A}) = 5/2$

(1) 2 řádky dominují 3. a 4. ⇒ $Val(A) = Val\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5/2$

není

(2) saddle point. [NE ⇒ hledej MIX.str.]

$v(\{1,2\}) = 3$ a $v(\{2,3\}) = 2$