efficience = efektivnica
(různé fu v různých oborech)
(ale fakticky totéž)

fj. ∀ hráči v koalici

Množinu efektivních výplat označíme $E(v)$.

ii) $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$ rozdělení celé výplaty mezi všechny členy

- jádro kooperativní hry pro koalici N
  - jádro je množina efektivních výplat, které nejsou dominované (jsou nedominované) žádnou výplatou

Věta 2:
- vlastnost jádra: $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in C(N)$ (=jádro), když a jen když splňuje:
  - i) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ výplata, když součást koalice
  - ii) pro $\forall S \subseteq N$ platí: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ výplata, když se podkoalice

- Def: Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$, x_i je výhra i-tého hráče, pak x se nazývá výplata (výplatní vektor)
(změna značení: $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$)

- Def: Řekneme, že výplatní vektor y je dominován výplatním vektorem x vzhledem ke koalici $S \subseteq N$ (značení: $y \prec_S x$), jestliže (i) $x_i > y_i \quad \forall i \in S$
(ii) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ maximum, co si mohou zajistit

Výplata y je dominována výplatou x ($y \prec x$), jestliže $\exists$ neprázdná koalice $S \subseteq N$ taková, že $y \prec_S x$.

množina hráčů   S nesouvisí s koalicí S!

- Stabilní množiny
  - Def: Řekneme, že množina $S(v) \subseteq E(v)$ je stabilní množina hry (v, N), jestliže platí:
    - i) $\forall x, y \in S(v): y \not\prec x$
    - ii) $\forall$ efektivní výplatu $z \notin S(v)$ $\exists x \in S(v): z \prec x$.
  - může se stát: $\underset{S(v)}{y} \underset{\in}{} \prec \underset{\notin S(v)}{z} \prec \underset{\in S(v)}{x}$ (důvodem toho, že v Def dominance „∃ neprázdná koalice $S \subseteq N$“)

řešení ⇒ Gillies (1959): Jádro hry: $C(v)$

- Věta 1: $C(v) \subseteq S(v)$

těžiště jádro

- např: Těžiště jádra: Střední hodnota rovnoměrného roz na $C(v)$. (jako řešení)

pokud hráčům těžiště jako řešení nevyhovuje, lze se posunout - kousek vedle (a stále zůstávat v jádru)

∀ fce lineární

⊕ snadné nalezení jádra (1 polyedrická množina)
jádro určeno jednoznačně (1 polyedrická množ.)
⊖ jádro může být prázdné
řešení → Shapleyho hodnota:
- alternativní řešení hry:

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \mathbb{I}_{[i \in S]} \cdot \frac{(|S|-1)! \cdot (|N|-|S|)!}{|N|!} \cdot [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

kde $|S|$ ... # členů koalice S, tj. mohutnost množiny S
$|N| = n$
$\mathbb{I}_{[i \in S]} = 1$ pokud $i \in S$
$= 0$ jinak
= odhad stř. hodnoty výhry i-tého hráče
- $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ ... benefit, který přinesl i-tý hráč
= výplata, kterou koalice je ochotna zaplatit za připojením i-tého hráče do koalice
- $(|S|-1)!$ ... ∀ pořadí, jak se mohou přiřadit hráči, než se přidá i-tý
$(|N|-|S|)!$ ... ∀ pořadí, jak se mohou přiřadit hráči poté, co se přidá i-tý
$|N|!$ ... ∀ pořadí
předp., že i-tý hráč se přiřadí jako poslední!
- Shapleyho hodnota nemusí být uvnitř jádra (i u neprázdného jádra) (např. jádro „dvoubodové" - jednobodové, úsečka a my očekáváme obrazec...)
- Př: $n = 3$, $N = \{1,2,3\}$ a:
$v(1) = 1$, $v(2) = v(3) = v(\{2,3\}) = 0$, $v(1,2) = 2$,
$v(1,3) = v(1,2,3) = 3$
- jádro: $x_1 + x_2 + x_3 = v(1,2,3) = 3$ (i)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{(ii)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 &\geq 2 \\ x_1+x_3 &\geq 3 \\ x_2+x_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{(ii)}$$

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3$$

$$3 - x_2 - x_3 \geq 1 \iff x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3 - \cancel{x_2} - x_3 + \cancel{x_2} \geq 2 \iff x_3 \leq 1$$

$$3 - x_2 - \cancel{x_3} + \cancel{x_3} \geq 3 \iff x_2 \leq 0 \implies x_2 = 0$$

$$\implies x_1 = k \quad ; k \in [2,3]$$

$$x_3 = 3 - k$$

jádro úsečka, těžiště: $k = 2{,}5 \implies (2{,}5; 0; 0{,}5)$

→ pravděpodobné koalice pouze $\{1,3\}$ ($\{2\}$ nic nepřináší ($\{1,3\}$ ji nemusí chtít) & $\{2\}$ dostane nulu ($\{2\}$ nemusí chtít v koalici zůstat))

- Shapleyho hodnota

$$\Phi_1(v) = \underbrace{1 \cdot \frac{2! \cdot 0!}{3!}}_{\{1\} \text{ sama}} + \underbrace{(\overset{v(1,2)}{2} - \overset{v(2)}{0}) \cdot \frac{1! \cdot 1!}{3!}}_{\{2,1\} \text{ přišel první}} + \underbrace{(\overset{v(1,3)}{3} - \overset{v(3)}{0}) \cdot \frac{1! \cdot 1!}{3!}}_{\{3,1\}} +$$

$$+ \underbrace{(\overset{v(1,2,3)}{3} - \overset{v(2,3)}{0}) \cdot \frac{2! \cdot 0!}{3!}}_{\{2,3,1\} \text{ či } \{3,2,1\}} = \frac{13}{6} \sim \text{jádro}$$

$$\Phi_2(v) = \underbrace{1 \cdot \frac{1! \cdot 1!}{3!}}_{\{1,2\}} = \frac{1}{6}$$ ... výhodnější pro hráče $\{2\}$ než z jádra

$$\Phi_3(v) = 3 - \left(\frac{13}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} \sim \text{jádro}$$