ÚLOHA LP:

min/max $\sum_{j\in J} c_j x_j$

s.t. $\sum_{j\in J} A_{i,j} x_j \ge b_i,\ i\in I_1,\ \sum_{j\in J} A_{i,j} x_j \le b_i,\ i\in I_2,$

$\sum_{j\in J} A_{i,j} x_j = b_i,\ i\in I_3,\ x_j \ge 0,\ j\in J_1,\ x_j \le 0,\ j\in J_2,$

$x \in R^J$

$M = \{x: \dots\}$ – mn. příp. řešení

$[c\in R^J, b\in R^I, A\in R^{I\times J}$, card $(I)=m$, $I_1, I_2, I_3 \subset I$ disj.: $\cup I_i = I$, card $(J)=n$, $J_1, J_2, J_3 \subset J$ disj., $\cup J_i = J]$

STANDARDNÍ TVAR: $I_1=\emptyset,\ I_2=\emptyset,\ J_2=\emptyset,\ J_3=\emptyset$

MAX ⟺ MIN $(-f)$; $\cdot(-1)$ obrácení nerovnosti; $\cdot(-1)$ proměnné +/−, slack. prom.

Příklad 1: min $x_1 - x_2$

s.t. $2x_1 + x_2 \ge 2,\ -3x_1 + 2x_2 \le 6,\ x_1 + x_2 \le 4,\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

* $M = \{(x_1,x_2)\in R^2: 2x_1+x_2\ge 2,\ -3x_1+2x_2\le 6,\ x_1+x_2\le 4,\ x_1\ge 0,\ x_2 \ge 0\}$ je konvexní 5-úhelník s vrcholy $(1,0), (4,0), (\frac{2}{5}, \frac{18}{5}), (0,3)$ a $(0,2)$.
* Vyneseme rovnoběžky $x_1 - x_2 = k,\ k\in R$ ... hledáme nejmenší $k\in R$ tak, aby tyto rovnoběžky ležely v M. $\Longrightarrow k = -16/5$ v bodě $(\frac{2}{5}, \frac{18}{5})$.

Příklad 2: min $x_1 - x_2$

s.t. $2x_1 + x_2 \ge 2,\ -3x_1 + 2x_2 \le 6,\ x_1 + x_2 \le -1,\ x_1, x_2 \ge 0$

$M = \emptyset \Rightarrow$ nemá přípustné řešení $\Rightarrow$ nemá optimální

Příklad 3: min $x_1 - x_2$

s.t. $2x_1 + x_2 \ge 2,\ -3x_1 + 2x_2 \le 6,\ x_1, x_2 \ge 0$

$M \ne \emptyset$ neomezená, rovnoběžky $x_1 - x_2 = k$ mají neprázdný průnik $\Rightarrow$ fční hodnoty na M klesají $\Rightarrow$ nemá MIN

Věta (Farkas, NaP k nezápornosti M):

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$: $Ax=b$ má nezáporné řešení $\iff$ $\forall u\in\mathbb{R}^m$: $A^Tu\geq 0$, platí $b^Tu\geq 0$.

Interpretace: Buď má soustava nezáp. řešení, nebo nalezneme l. k. soustavy s nez. lin. koeficienty a záp. pravou stranou.

Příklad 4: s. l.: $x_1+x_2+x_3=1$ $/\cdot 3$
$2x_1+3x_2-x_4=6$ $/\cdot(-1)$ $\Big)+$ $\Rightarrow$ $x_1+3x_3+x_4=-3$

$u=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ porušuje V. 4.

Věta (Existence OPT. Ř.):

$M=\{x\in\mathbb{R}^n: Ax=b;\ x\geq 0\}\neq\emptyset$ a $\exists\, y>0$: $\forall x\in M$ platí $c^Tx\geq y$,

pak má úloha LP $\min\{c^Tx: x\in M\}$ opt. řešení.

! linearita úč. fce, viz $\min\{e^{-x}, x\geq 0, x\in\mathbb{R}\}$

omezená zdola, ale přesto NE OPT. Ř.

$\text{conv}(S)=\{\sum_{s\in S}\lambda(s)s;\ \sum\lambda(s)=1,\ \lambda(s)\geq 0,\ \forall s\in I,\ I\subseteq S\}$

Věta (Rozklad M): M je součtem konvexního polyedru $\text{conv}(\text{ext}(M))$ a konvexního polyedrického kužele $(\text{pos}(\text{extd}(M)))=\text{direct}(M)$

ext. kr.

$\text{pos}(S)=\{\sum_s\lambda(s)s;\ \lambda(s)\geq 0,\ \forall s\in I,\ I\subseteq S\}$

L M je konvexní polyedrická mn. (průnik mn. poloprostorů)

$\text{direct}(M)=\{x\in\mathbb{R}^n: Ax=0,\ x\geq 0\}$

generuje množina krajních směrů

krajní body

$\text{ext}(M)=\{y\in M: h(A_{m\times P(y)})=\text{card}(P(y))\}$

$P(y)=\{i\in I: y_i>0\}$

$\leq\binom{n}{h(A)}$

$\text{extd}(M)=\{y\in M: h(A_{m\times P(y)})=\text{card}(P(y))-1,\ \|y\|=1\}$

$\leq\binom{n}{h(A)+1}$

Příklad 5: $M=\{x\in\mathbb{R}^4: 2x_1-x_2-x_3=-2,\ -x_1+2x_2-x_4=-1,\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\}$

(1) krajní směry: a) jedna kladná se. A nemá 0 sloupec

b) dvě kladné složky se - 2x2 podmatice A jsou regul.

c) $(2,1,3,0)^T$, $(1,2,0,3)^T$

(2) krajní body: 0, 1, 3, 4 kladné složky se, neboť A má hod. dva

$\{(1,0,4,0),(0,4,0,7),(0,0,4,1)\}$

Věta: $M \neq \emptyset \iff$ ex-li krajní bod

[krajní bod je nedegen. $\iff$ má $h(A)$ nenulových složek]

Pro úlohu L.P.:
(a) $M = \emptyset$
(b) $M \neq \emptyset$ a $\inf_{x \in M} c^T x = -\infty$ $(M^* = \emptyset)$
(c) $M^* \neq \emptyset$ $[\iff M \neq \emptyset$ a $c^T y \geq 0 \ \forall y \in \mathrm{extd}(M)]$ + opt. v. kraj. bodě

~ Příklad 6: $\min 3x_1 - x_2$:

s.t. $2x_1 - x_2 - x_3 = -2,\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -1,\ x \in \mathbb{R}^4,\ x \geq 0.$

$\mathrm{extd}(M) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ a $\mathrm{ext}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

na ext(M) hodnoty $3, -2, 0$ a extd(M) $\frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}$

(Přímá metoda pro malé úl.) $\Downarrow$ $M \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $M^* \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ má ext(M)
- NE: KONEC $M = \emptyset$
- ANO: ověřuj extd(M)
  - ≥ 0: $M^* \neq \emptyset$ a opt. v nejlepším ext(M)
  - $\exists < 0$: $M^* = \emptyset$

Dualita

$A_{I_1 \times J} x \geq b_{I_1},\ A_{I_2 \times J} x \leq b_{I_2},\ A_{I_3 \times J} x = 0,\ x_{J_1} \geq 0,\ x_{J_2} \leq 0$

$\min \{ c^T x : Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^J \}$ $(*)$

$\max \{ b^T y : A^T y \leq c,\ y \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^I \}$ $(**)$

$(A_{I \times J_1})^T y \leq c_{J_1},\ (A_{I \times J_2})^T y \geq c_{J_2},\ (A_{I \times J_3})^T y = c_{J_3},\ y_{I_1} \geq 0,\ y_{I_2} \leq 0$

V (O slabé dualitě): Pro dvojici duálních úloh $(*)$ a $(**)$ a jejich přípustná řešení $x \in M$ a $y \in N$: $c^T x \geq b^T y$.

! Rovnost nastává $\iff$ splněny podmínky komplementarity
$\forall j \in J$: buď $(A^T y - c)_j = 0$, nebo $x_j = 0$
$\forall i \in I$: buď $(Ax - b)_i = 0$, nebo $y_i = 0$

V (O dualitě): Když $M \neq \emptyset$ a $N \neq \emptyset$ ⇒ pak mají (*) i (**) optimální řešení.

V (O silné dualitě): (*) má opt. řeš. ⇔ (**) má opt. řešení.

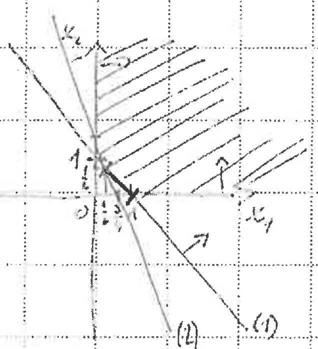
[platí rovnost úč. fcí]

V (O komplementaritě): Nechť $x \in M$ a $y \in N$, pak x je opt. řešení (*) a y je opt. řešení (**) ⇔ splňují PK.

$\rightarrow \inf\{c^T x, x \in M\}$ $\quad \sup\{b^T y, y \in N\}$

1. $M = \emptyset, N = \emptyset, \gamma^* = +\infty, \delta^* = -\infty$, nemá příp. řešení
2. $M \neq \emptyset, M^* = \emptyset, N = \emptyset, \gamma^* = \delta^* = -\infty$, (*) má přípustné, ale ne opt., (**) nemá příp. ani opt.
3. $M = \emptyset, N \neq \emptyset, N^* = \emptyset, \gamma^* = \delta^* = +\infty$, (*) nemá příp., (**) má přípustné ř., ale ne opt.
4. $M \neq \emptyset, N \neq \emptyset, M^* \neq \emptyset, N^* \neq \emptyset, \gamma^* = \delta^*$

$\hat{x}$ $\hat{y}$ splňují PK



Příklad 7: min $x_1 + x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \geq 1$ (1)

$2x_1 + x_2 \geq 3/2$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

M; $(2,2) \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$

1. sestavíme duální úlohu:

		x_1	x_2		
		≥ 0	≥ 0		
y_1	≥ 0	1	1	$\geq$	1
y_2	≥ 0	2	1	$\geq$	3/2
		$\leq$	$\leq$	←	MAX
		1	1	MIN	

min zadání

max opačně

max $y_1 + \frac{3}{2} y_2$

s.t. $y_1 + 2y_2 \leq 1$

$y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

N

$(0,0) \in N \Rightarrow N \neq \emptyset$

Dle věty o dualitě musejí mít úlohy opt. řešení

2. Řešíme graficky duální úlohu $\hat{y}_1 = 1, \hat{y}_2 = 0$, úč. fce = 1

PK: $1 = \hat{y}_1 > 0 \Rightarrow (Ax - b)_1 = 0$: $x_1 + x_2 = 1$

$1 \geq x_1 \geq 1/2$, $x_2 = 1 - x_1 \geq 0$, $x_1 + x_2 = 1$

Příklad 8:

$$\min\ 2x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$\text{s.t. } 3x_1 + 6x_2 - x_3 \geq 4$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3$$
$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}$$

		x_1	x_2	x_3		
		≥ 0	≥ 0	$\in R$		
y_1	≥ 0	3	6	-1	$\geq$	4
y_2	≤ 0	2	-3	2	$\leq$	3
y_3	$\in R$	1	-2	4	$=$	2
		$\leq$	$\leq$	$=$		MAX
		2	-1	3	MIN	

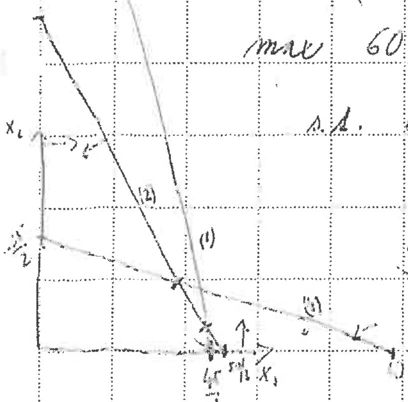
$$\max\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3$$
$$\text{s.t. } 3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2$$
$$6y_1 - 3y_2 - 2y_3 \leq -1$$
$$-y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 3$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \in \mathbb{R}$$

→ Produkční problém

Příklad 9: Firma vyrábí 2 výrobky A, B, které procházejí zpracováním na 4 strojích I, II, ..., IV.

výr. / stroj	I	II	III	IV	
A	2	4	3	1	doba (čas)
B	1/4	2	1	4	
kapac.	45	100	300	50	→ čas

Cena výr. A je 60 Kč, B je 40 Kč. V jakém poměru vyrábět, aby max. prod. cena?



$$\max\ 60 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2$$
$$\text{s.t. } 2x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \leq 45 \quad (1)$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 100 \quad (2)$$
$$3x_1 + x_2 \leq 300 \quad (3)$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 50 \quad (4)$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$M \neq \emptyset$

		x_1	x_2		
		≥ 0	≥ 0		
y_1	≥ 0	2	1/4	$\leq$	45
y_2	≥ 0	4	2	$\leq$	100
y_3	≥ 0	3	1	$\leq$	300
y_4	≥ 0	1	4	$\leq$	50
		≥ 0	≥ 0		MIN
		60	40	MAX	

M je konvexní pětiúhelník. $M \neq \emptyset$

$(0,0)$; $(\frac{45}{2}, 0)$; $(0, \frac{25}{2})$; $(\frac{110}{7}, \frac{50}{7})$ (2) a (4)

$(\frac{65}{3}, \frac{20}{3})$ (1) a (2)   1571.428

duální: $$\min\ 45y_1 + 100y_2 + 300y_3 + 50y_4$$
$$\text{s.t. } 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 60$$
$$\tfrac{1}{4}y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 40$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

„Problém kupujícího" (kupující min. cenu) (tj. max. fin. ...) ALE: je o ceně za odkoupení kapacit

[Aby dal, aby prodávající vydělal aspoň tolik, co by sám vyprodukoval]

$M \neq \emptyset$ a máme opt. řešení ⇒ duální komplementarita

(1.) $2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_4 = 60$; $\frac{1}{4}y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 = 40$

(2.) 1. a 3. nejsou opt. ⇒ $y_1 = y_3 = 0$

$M \neq \emptyset$ a $N \neq \emptyset$ [dualita] ⇒ obě mají OPT.

napočítáme jej dosazením opt. ř. $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4) = (0, \frac{100}{7}, 0, \frac{20}{7}) \sim 1571.428$

~ Příklady (ev. sam. práce)

Úloha L_1-regrese : $\left.\begin{array}{l}\min \sum_{i=1}^{N} |y_i - a - b x_i| \\ \text{s.t. } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \rightarrow$ LP form