ME

TEORIE UŽITKU

Úvod do matematické ekonomie
Zimmermann Karel

Ⓐ Axiomatická teorie užitku

- Základní pojmy a definice

X … základní množina alternativ

$R \subset X \times X$ … binární relace

$(x,y) \in R \overset{def}{\iff} xRy$

· Def 1.1: Binární relace R na X se nazývá:

1) reflexivní, je-li xRx, $x \in X$
2) irreflexivní, je-li $x\bar{R}x$, $\forall x \in X$ tj. x není v relaci s x
3) symetrická, když: $xRy \Rightarrow yRx$, $\forall x,y \in X$
4) asymetrická, když: $xRy \Rightarrow y\bar{R}x$
5) antisymetrická, když: $xRy \;\&\; yRx \Rightarrow x \equiv y$, $\forall x,y \in X$
6) tranzitivní, když: $xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$, $\forall x,y,z \in X$
7) negativně tranzitivní, když: $\bar{R}$ je tranzitivní
   tzn. $x\bar{R}y \;\&\; y\bar{R}z \Rightarrow x\bar{R}z$ $\forall x,y,z \in X$
8) úplná, když: $\forall x,y \in X$ je ~~[illegible]~~ xRy nebo yRx ne ~~vylučující~~
9) slabě úplná, když: $\forall x,y \in X$, $x \not\equiv y$ je buď xRy nebo yRx vylučující

· Def 1.2: Binární relace R na $X \times X$ se nazývá:

a) slabé uspořádání, je-li asymetrická a negativně tranzitivní
   nevždy dokážu uspořádat
b) striktní uspořádání, je-li slabým uspořádáním a slabě úplná
   vždy dokážu porovnat, když mohu i [illegible]
c) ekvivalence, je-li reflexivní, symetrická, tranzitivní

· Př: $R \equiv$ „$>$" na $\mathbb{R}$

striktní uspořádání, slabé uspořádání

při rozšíření na $\mathbb{R}^n$ srovnávání vektorů obtížné

($\Rightarrow$ platí pro striktní uspořádání, ne slabé)

tvrdý ekvivalence vždy jednoprvková

· <u>Def</u>: Nechť I je ekvivalence na X a $\bar{x} \in X$. Potom $a(\bar{x}) = \{x \mid x I \bar{x}\}$ se nazývá <u>třída ekvivalence</u> s generátorem $\bar{x}$.

- <u>Preferenční relace</u>:

· <u>Def</u>: $\succ$ $\quad x \succ y$; $x \prec y$: $x \prec y \Leftrightarrow y \succ x$

x je lepší než y $\quad$ x je horší než y

<u>indiference</u>: $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ neplatí ani $x \succ y$ ani $x \prec y$

nepreferuje x před y ani y před x, tedy x stejně jako y — stejně dobré

· <u>Def</u>: $\succsim$: $x \succsim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \succ y$ nebo $x \sim y$

$x \precsim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \prec y$ nebo $x \sim y$

· <u>Věta 2.1</u>:

a) Relace $\succ$ ($\prec$) je tranzitivní

b) Relace $\sim$ je ekvivalencí

c) $x \succ y,\ y \sim z \Rightarrow x \succ z$

$x \sim y,\ y \succ z \Rightarrow x \succ z$

d) $\succsim$ je tranzitivní a úplná

- <u>Existence ordinální užitkové fce</u>:

· <u>Def 2.1</u>: Reálná fce $u: X \to \mathbb{R}$ se nazývá <u>ordinální užitková fce</u>, jestliže: $u(x) > u(y) \Leftrightarrow x \succ y \quad \forall x, y \in X$.

· <u>Poznámka</u>: a) $\forall x, y \in X$ máme: $u(x) < u(y) \Leftrightarrow x \prec y$

$u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$

$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$

$u(x) \leq u(y) \Leftrightarrow x \precsim y$

b) Množina $\{x \mid x \in X, u(x) = konst\}$ je prvkem množiny $X|\sim$

množina třídy ekvivalence dané relací indiference

je-li tato množina neprázdná. Je-li $a(\bar{x}) \in X|\sim$, pak $a(\bar{x}) = \{x \mid x \in X, u(x) = u(\bar{x})\}$.

• Postačující podmínka existence ordinální užitkové funkce:

• Věta 3.1: Nechť $X|\sim$ je spočetná, potom $\exists$ ordinální užitková fce.

• Def: Množina $A \subset X|\sim$ se nazývá hustá v $X|\sim$ vzhledem k relaci $\prec$, jestliže pro libovolné $x, y \in X|\sim$, $x, y \notin A$, $x \prec y$ existuje $z \in A$ tak, že $x \prec z \prec y$.

srovnání tříd ekvivalence, ne alternativ

• Věta 3.2: „Nutná a postačující podmínka pro existenci ordinální užitkové fce"
Nechť $X|\sim$ je nespočetná. Potom $\exists u \Leftrightarrow \exists$ v množině $X|\sim$ spočetná hustá podmnožina.

*

- Odhad: $X = X^{(1)} \times X^{(2)} \times \ldots \times X^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$, tj. kartézský součin otevřených intervalů z $\mathbb{R}$. n-rozměrný otevřený int.
$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ \forall i = 1, \ldots, n$; $x < y \Leftrightarrow (x \leq y$ a $x \neq y)$

- Axiomy:
(A1) $\prec$ je slabé uspořádání na X
(A2) $x < y \Rightarrow x \prec y \quad \forall x, y \in X$ horší ve $\forall$ složkách $\Rightarrow$ horší celkově
(A3) Nechť $x \prec y \prec z$. Potom $\exists$ čísla $\alpha, \beta \in (0,1)$ tak, že:
$\underset{\alpha \text{ blízké } 1}{\alpha x + (1-\alpha) z} \prec y$; $\underset{\beta \text{ blízké } 0}{\beta x + (1-\beta) z} \succ y$

- Věta: Když $X = X^{(1)} \times \ldots \times X^{(n)}$ a platí (A1), (A2), (A3) $\Rightarrow$ $\exists$ ordinální užitková fce na X.

Def spojitosti
- Spojitost: (A4)

• Def 4.1: Relace $\prec$ na X se nazývá spojitá na X, jestliže: $P_y^- = \{x \mid x \in X, x \prec y\}$, $P_y^+ = \{x \mid x \in X, x \succ y\}$ jsou pro všechna $y \in X$ otevřené.

• Věta: Nechť platí (A1), (A2), (A3), (A4). Potom $\exists$ spojitá