• Postačující podmínka existence ordinální užitkové funkce:

• Věta 3.1: Nechť $X|\sim$ je spočetná, potom $\exists$ ordinální užitková fce.

• Def: Množina $A \subset X|\sim$ se nazývá hustá v $X|\sim$ vzhledem k relaci $\prec$, jestliže pro libovolné $x, y \in X|\sim$, $x, y \notin A$, $x \prec y$ existuje $z \in A$ tak, že $x \prec z \prec y$.
srovnání tříd ekvivalence, ne alternativ!

• Věta 3.2: „Nutná a postačující podmínka pro existenci ordinální užitkové fce"
Nechť $X|\sim$ je nespočetná. Potom $\exists\, u \Leftrightarrow \exists$ v množině $X|\sim$ spočetná hustá podmnožina.

* ~~[illegible]~~: $X = X^{(1)} \times X^{(2)} \times \dots \times X^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$, tj. kartézský součin otevřených intervalů z $\mathbb{R}$ .. n-rozměrný otevřený int.
$x \le y \Leftrightarrow x_i \le y_i \ \forall i = 1, \dots, n$; $x < y \Leftrightarrow (x \le y$ a $x \ne y)$

- Axiomy:
(A1) $\prec$ je slabé uspořádání na X
(A2) $x < y \Rightarrow x \prec y \quad \forall x, y \in X$ horší ve $\forall$ složkách $\Rightarrow$ horší alternativa
(A3) Nechť $x \prec y \prec z$. Potom $\exists$ čísla $\alpha, \beta \in (0,1)$ tak, že:
$\underbrace{\alpha x + (1-\alpha) z}_{\alpha \text{ blízké } 1} \prec y$; $\underbrace{\beta x + (1-\beta) z}_{\beta \text{ blízké } 0} \succ y$.

- Věta: Když $X = X^{(1)} \times \dots \times X^{(n)}$ a platí (A1), (A2), (A3) $\Rightarrow$ $\exists$ ordinální užitková fce na X.

ref spojitosti
- Spojitost: (A4)
• Def 4.1: Relace $\prec$ na X se nazývá spojitá na X, jestliže: $P_y^- = \{x \mid x \in X, x \prec y\}$, $P_y^+ = \{x \mid x \in X, x \succ y\}$ jsou pro všechna $y \in X$ otevřené.

• Věta: Nechť platí (A1), (A2), (A3) (A4). Potom $\exists$ spojitá ordinální užitková fce u $\Leftrightarrow$ $\prec$ je spojitá na X.

(A5) ... axiom konvexity relace $\prec$

Tj. Def 4.2: Relace $\prec$ se nazývá konvexní preferenční relace na X, jestliže množiny $L_y = \{x \mid x \in X, x \succsim y\}$ jsou konvexní podmnožiny X pro $\forall y \in X$.

- Věta: Preferenční relace $\prec$ na X je konvexní $\Leftrightarrow$

  a) $x^{(1)}, x^{(2)} \in X: x^{(1)} \succsim x^{(2)} \Rightarrow x^{(1)} \succsim \alpha x^{(1)} + (1-\alpha) x^{(2)}$ $\forall \alpha \in (0,1)$

  b) $P_y = \{x \mid x \in X, x \succ y\}$ jsou konvexní $\forall y \in X$ tj. z Def. lze vypustit $x \succsim y$

  c) ordinální užitková fce u na X je kvazi-konkávní.

- Poznámka: • Fce je kvazi-konkávní $\Leftrightarrow$ $\overline{L}_y = \{x \mid x \in X, u(x) \geq y\}$ je konvexní.

  • $x^1, x^2 \in X$: $\lambda u(x^1) + (1-\lambda) u(x^2) \leq u(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2)$ ... konkávní

  $\min(u(x^1), u(x^2)) \leq u(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2)$ ... kvazi-konkávní

  $\forall \lambda \in (0,1)$.

- Def 4.3: Relace $\prec$ se nazývá striktně konvexní, jestliže $(x^1 \succsim x^2, \alpha \in (0,1)) \Rightarrow x^1 \prec \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2$.

- Množina nejlepších prvků

  • Def 5.1: Nechť $\pi \subseteq X$. Prvek $\bar{x} \in \pi$ se nazývá nejlepším prvkem množiny π, jestliže $\bar{x} \succsim x$ $\forall x \in \pi$.

  • Věta 5.1: Je-li množina $\pi \subseteq X$ konvexní a relace $\prec$ konvexní $\Rightarrow$ πNP (= množina nejlepších prvků) je konvexní.

  • Věta 5.2: Je-li množina π konvexní a relace $\prec$ striktně konvexní pak, pokud v π existuje nejlepší prvek, pak je jediný. (Tj. πNP je jednobodová.)

• Důsledek: Je-li navíc relace $\prec$ spojitá, pak
VS.1. $\Rightarrow$ MNP je neprázdná a konvexní
VS.2 $\Rightarrow$ MNP je jednobodová.

- V praxi nestačí vědět, že $A \succ B$ a $x \succ y$. Chceme tyto preference ~~kvantifikovat~~ porovnávat mezi sebou!

Ⓑ Kardinální užitkové funkce
- $u: X \to \mathbb{R}$
(AI) $\prec$ slabé uspořádání
(AII) $P \precsim Q \precsim R$: pak $\{\alpha \mid \alpha P + (1-\alpha)R \precsim Q\}$, $\{\alpha \mid \alpha P + (1-\alpha)R \succsim Q$
jsou uzavřené množiny.
(AIII) $P \sim Q$: pak $\alpha P + (1-\alpha)R \sim \alpha Q + (1-\alpha)R \quad \forall R \in X, \forall \alpha \in (0,$
- Kardinální užitková fce u:
Def $u: X \to \mathbb{R}$; $u(P) < u(Q) \Leftrightarrow P \prec Q$; P je preferováno před Q více než R před S: $u(P) - u(Q) > u(R) - u(S)$; $v(P) = a\,u(P)$ ·
$a > 0, b \in \mathbb{R}$ (tj. $v(P)$ indiferentní vůči lineární pozitivní transformaci). ekvivalence vlastnost už. fcí

- Věta: (AI) + (AII) + (AIII) $\Rightarrow \exists$ kardinální užitkové fce.

- Kardinální užitková fce v teorii rozhodování za rizika:
• $u: W \to \mathbb{R}$ Dupačová, Hurt, Štěpán 2002 Ingersol 1987?
• Def: u je užitková fce (odteď vždy kardinální), pokud je spojitá a neklesající. zásadní vlastnost: mít víc vždy lepší než mít míň
↳ nemusí být, ale dáno historicky PŘEDP. NENASYCENOSTI
může být konstantní: $\uparrow\uparrow$ bohatství $\Rightarrow$ 1 Kč nepřináší již nic

• w ... náh. veličina $\to E\,u(w)$

• Def: Nechť u je užitková fce a W je hladina majetku investora. Uvažujme ohodnou hru w s rozdělením P_w