• <u>Důsledek</u>: Je-li navíc relace $\prec$ spojitá, pak
VS.1. $\Rightarrow$ MNP je neprázdná a kompaktní
VS.2 $\Rightarrow$ MNP je jednobodová.

- V praxi nestačí vědět, že $A \succ B$ a $x \succ y$. Chceme tyto preference ~~kvantifikovat~~ porovnávat mezi sebou!

(B) Kardinální užitkové funkce

- $u: X \to \mathbb{R}$

(AI) $\prec$ slabé uspořádání

(AII) $P \precsim Q \precsim R$ pak $\{\alpha \mid \alpha P + (1-\alpha)R \precsim Q\}$, $\{\alpha \mid \alpha P + (1-\alpha)R \succsim Q\}$ jsou uzavřené množiny.

(AIII) $P \sim Q$ pak $\alpha P + (1-\alpha)R \sim \alpha Q + (1-\alpha)R \quad \forall R \in X, \forall \alpha \in (0, 1)$

- <u>Kardinální užitková fce u</u>:

Def $u: X \to \mathbb{R}$; $u(P) < u(Q) \Leftrightarrow P \prec Q$ (P je preferováno před Q více než R před S: $u(P) - u(Q) > u(R) - u(S)$) $\exists\, v(P) = a\,u(P) + b$, $a > 0, b \in \mathbb{R}$ (tj. $v(P)$ indiferentní vůči lineární pozitivní transformaci).

vlastnost ekvivalence ně-fcí

- <u>Věta</u>: (AI) + (AII) + (AIII) $\Rightarrow$ $\exists$ kardinální užitkové fce.

- <u>Kardinální užitková fce v teorii rozhodování za rizika</u>:

• $u: W \to \mathbb{R}$ — Jupošová, ..., Štěpán 2002; Ingersol 1987?

• <u>Def</u>: u je <u>užitková fce</u> (odteď vždy kardinální), pokud je <u>spojitá</u> a neklesající. zásadní vlastnost: mít víc <u>vždy</u> lepší než mít míň
↳ nemusí být, ale dáno historicky — PŘEDP. NENASYCENOSTI
může být konstantní: ?? bohatství → ?ke nepřináší již nic

• w ... náh. veličina $\to E\,u(w)$

• <u>Def</u>: Nechť u je užitková fce a W je hladina majetku investora. Uvažujme náhodnou hru ω s rozdělením P_ω

+ případně další omezení

(existuje $E\omega$ i $Eu(W+\omega)$), pak:

1) investor je rizikově averzní na hladině majetku W, jestliže $E u(\underbrace{W+\omega}_{\text{hra ano}}) < u(W+\underbrace{E\omega}_{\neg\,\text{hra}})$ $\forall$ vhodnou hru ω
   - př: $W = 100$ kč

     $\omega = \pm 50$ kč s pstí $1/2$, $E\omega = 0$ kč
   - banky či penzijní fondy rizikově averzní: „nesmí" přijít o svěřené peníze

2) investor je rizikově neutrální na hladině majetku W, jestliže $Eu(W+\omega) = u(W+E\omega)$ $\forall$ vhodnou hru ω.
   - investor je indiferentní
   - jedinec má $\uparrow\uparrow$ bohatství ~~[illegible]~~

3) investor je riziko vyhledávající na hladině majetku W, jestliže $Eu(W+\omega) > u(W+E\omega)$ $\forall$ vhodnou hru ω.
   - omezení na malý vklad a velký zisk – loterie sázející si myslí, že mají šanci na výhru vyšší, než je skutečnost

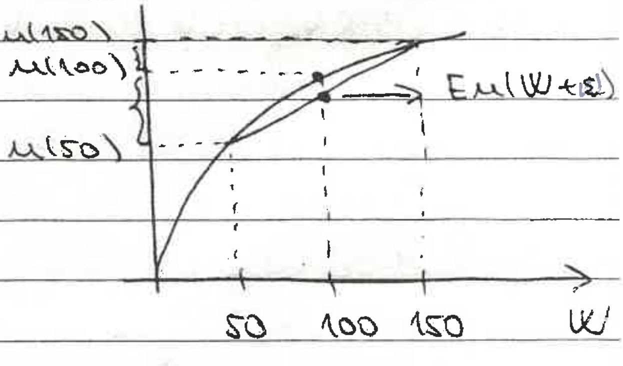
- Def: Investor je globálně rizikově averzní/neutrální/oblibující riziko, jestliže je rizikově averzní/neutrální/oblibující riziko na každé hladině majetku W.

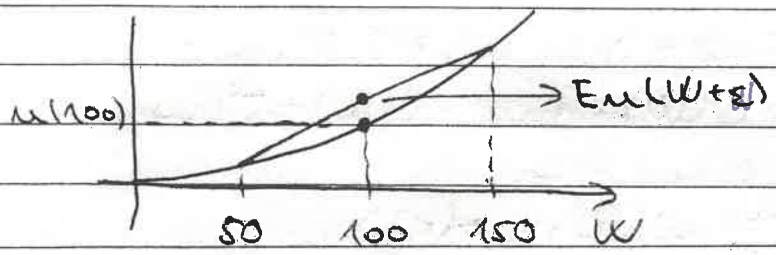
spojitá (Def)

- Věta: Nechť $u: I \to \mathbb{R}$ je užitková fce. Pak je investor
  1) globálně rizikově averzní $\Leftrightarrow$ u je striktně konkávní
  2) globálně rizikově neutrální $\Leftrightarrow$ u je lineární na I
  3) globálně oblibující riziko $\Leftrightarrow$ u je striktně konvexní na I

- Př: $W = 100$ kč

  $\omega = \begin{cases} -50 & \text{s pstí } 1/2 \\ 50 & \text{s pstí } 1/2 \end{cases}$





- většina investorů rizikově averzní, riziko vyhledávající nejvíce pro malé částky (= loterie & „není co ztratit“)

– Riziková prémie

- lhostejný (indiferentní) mezi hrou a částkou $E\omega + \pi_u(W, P_\omega)$ závisí na užitkové fci, majetku, rozdělení náh. vel (ne na konkrétní realizaci)
- Def: Riziková prémie $\pi(W, P_\omega)$ je definována jako řešení rovnice: $\underbrace{Eu(W+\omega)}_{\text{hraje hru}} = u(W + E\omega - \pi(W, P_\omega))$.

- Poznámka: $\pi(W, P_\omega) = \pi(W+\delta, P_{\omega-\delta})$

- Pojistná prémie: $\pi_I(W, P_\omega) = \pi(W, P_\omega) - E\omega$

částka, kterou je investor ochoten maximálně zaplatit, aby se vyhnul hře (když by částka byla vyšší, investor na hru přistoupí – jinak ho to stojí mnoho peněz)

$Eu(W+\omega) = u(W - \pi_I(W, P_\omega))$

- Peněžní ekvivalent: $\pi_a(W, P_\omega) = -\pi_I(W, P_\omega)$

$u(W + \pi_a(W, P_\omega)) = Eu(W+\omega)$ částka, kterou by investor musel dostat, aby byl ochoten hru hrát

částka, kterou by investor byl ochoten zaplatit, aby hru mohl hrát – pro riziko vyhledávající investory

- Prémie $\pi_b(W, P_\omega)$: $\cancel{u(W)} = Eu(W + \omega - \pi_b(W, P_\omega))$

– Míry rizikové averze chceme porovnávat ⇒ chceme nezávislost na ~~užitkových fcích~~ hře, pouze už fce je důležitá

- Předpoklad: $E\omega = 0$ … spravedlivá hra
- rozptyl: σ^2_ω

$\Rightarrow Eu(W+\omega) = u(W - \pi(\omega, P_\omega))$

$\rightarrow$ Taylorův rozvoj:

$$u(W-\pi(W,P_\omega)) = u(W) - \pi(W,P_\omega)\cdot u'(W) + O(\pi^2(W,P_\omega))$$

$$E\,u(W+\omega) = E\left[u(W) + \omega\cdot u'(W) + \frac{1}{2}\omega^2\cdot u''(W) + O^3(\omega)\right] =$$

- $E\omega = 0$
- $\operatorname{var}\omega = E\omega^2 - (E\omega)^2 = E\omega^2$

$$= E\,u(W) + \frac{1}{2}\sigma_\omega^2\cdot u''(W) + o(\sigma_\omega^2)$$

W mění málo rel

$$\Rightarrow \pi(W,P_\omega) = -\frac{1}{2}\sigma_\omega^2\cdot\frac{u''(W)}{u'(W)} + o(\sigma_\omega^2) \qquad , u(W) = E[u(W)]$$

$$\pi(W,P_\omega) \approx \frac{1}{2}\sigma_\omega^2\cdot\left[-\frac{u''(W)}{u'(W)}\right]$$

závisí pouze na užitkové fci, ne hře

závisí pouze na hře, ne na užitkové fci

- <u>Def:</u> $u: I \to \mathbb{R}$, u je dvakrát diferencovatelná, rostoucí, pak ARA míra je: $r(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = -\frac{d}{dW}\ln u'(W)$.

absolute risk aversion = ARA

- ARA = absolutní averzní rizikově míra či „Arrow-Pratt measure".

Nechť $\sigma_\omega^2 > 0$:

σ_ω nemůže být < 0

- <u>Poznámka:</u> 1) $r(W) > 0 \Leftrightarrow \pi(W,P_\omega) > 0 \Leftrightarrow$ rizikově averzní investor

2) $r(W) = 0 \Leftrightarrow \pi(W,P_\omega) = 0 \Leftrightarrow$ rizikově neutrální

3) $r(W) < 0 \Leftrightarrow \pi(W,P_\omega) < 0 \Leftrightarrow$ riziko oblibující in

4) $r_1(W) > r_2(W) \Leftrightarrow \pi_1(W,P_\omega) > \pi_2(W,P_\omega) \Leftrightarrow$ první investor je více rizikově averzní než druhý investor

- <u>Def:</u> RRA míra: $r_R(W) = W\cdot r(W)$
  - W je kladný $\Rightarrow \forall$ věty z Pozn. platí i pro RRA míru

- ARA, RRA závisí na $W \Rightarrow$ <u>lokální</u> míra rizika ~~vlastnosti užitkové~~ fce

$\Rightarrow$ <u>Def:</u> „Rubinsteinova rizikově averzní míra" $(\omega \neq 0)$

Předp: $\omega \sim N(\mu,\sigma^2)$:

$$R(W) = -\frac{W\cdot E\,u''(W+\omega)}{E\,u'(W+\omega)}$$

- $W_\omega = W(1+\tilde{\omega}) = W + \underbrace{W\cdot\tilde{\omega}}_{\omega'}$ $\Rightarrow R(W)$ lze psát s vlnkou či s pluskem
- globální míra rizika (ω nabývá všech hodnot – má normální rozdělení a vyskytuje se v „u a ū")

- Klasifikace užitkových fcí podle míry rizikové averze

1) konstantní ARA (u_{CARA}): $\frac{u''(W)}{u'(W)} = c$, $c>0$ abychom mluvili o rizikově averzním investorovi

- Věta: Dvakrát diferencovatelná užitková fce je konstantně ARA $\Leftrightarrow u_{CARA}(W) = a\cdot e^{-cW} + b$; $a\leq 0$, $c>0$, $b\in\mathbb{R}$

c parametr rizikové averze: čím c↑, tím investor více rizikově averzní

+ posunutí už. fce; a škálování už. fce

$u_{CARA}(W) \sim -e^{-cW}$; $c>0$; $u_{CARA}(W) \sim e^{-cW}$

- pro $c<0$ analogicky ⇒ riziko vyhledávající investor

pro $c=0$: $u_{CARA}(W) \sim W$, lineární užitkové fce

2) HARA fce

- Def: Investor ~~Užitková fce~~ je hyperbolicky absolutně rizikově averzní, pokud pro ~~jeho~~ jeho ARA míru platí:

$r(W) = \frac{1}{aW+b}$ pro $aW+b>0$; u_{HARA}: $-\frac{u''(W)}{u'(W)} = \frac{1}{aW+b}$

- Věta: u_{HARA}

mocninná

$$u_{HARA} = \begin{cases} \frac{c}{a-1}(aW+b)^{\frac{a-1}{a}} + d; & \text{pro } a\neq 0, a\neq 1, aW+b>0 \\ c\cdot\ln(W+b) + d; & \text{pro } W+b>0 \text{ („když } a=1\text{")} \\ -c\cdot e^{-\frac{1}{b}\cdot W} + d; & \text{pro } b>0 \end{cases}$$

logaritmická

exponenciální

vše pro $c>0$, $d\in\mathbb{R}$.

kvadratická

$u_{HARA} = -\frac{c}{2}(b-W)^2$; pro $c>0$, $b>W$ (když $a=-1$)

3) DARA