U je množina všech užitkových funkcí

U_k označuje množinu k-krát diferencovatelných už. funkcí takových, že $u^{(i)}\cdot(-1)^{i} \leq 0$, $i=1,2,\dots$

U_∞ je limitním případem, kdy už. fce jsou nekonečně diferencovatelné a jejich derivace střídají zn.

$$U_\infty \subseteq U_k \subseteq U_1 \subseteq U, \quad \text{kde } k \in \{1,2,\dots\}$$

FSD

def. Nechť X_F a X_G označují náhodné veličiny s distr. fcí F a G.

Řekneme, že X_F (striktně) dominuje X_G dle FSD ($X_F \succ_{FSD} X_G$), je-li

$\mathbb{E}\,u(X_F) \geq \mathbb{E}\,u(X_G)$ $\forall u \in U_1$, pro než střední hodnoty existují

a ex. $u_0 \in U_1$ tak, že $\mathbb{E}\,u_0(X_F) > \mathbb{E}\,u_0(X_G)$.

analogicky pro nestriktní

SSD (Second Order St. Dominance)

def. Nechť X_F a X_G označují náhodné vel. s d.f. F a G.

Řekneme, že X_F (striktně) dominuje X_G dle SSD ($X_F \succ_{SSD} X_G$), je-li

$\mathbb{E}\,u(X_F) \geq \mathbb{E}\,u(X_G)$ $\forall u \in U_2$, pro než střední hodnoty existují

a ex. $u_0 \in U_2$ tak, že $\mathbb{E}\,u_0(X_F) > \mathbb{E}\,u_0(X_G)$

zkoumají pak vyšší řád

Věta: $X_F \succ_{SSD} X_G \iff F^{(2)}(s) \leq G^{(2)}(s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$, $\exists s_0$ tak, že je splněno ostře.

$F^{(2)}(s) = \int_{-\infty}^{s} F(x)\,dx$ $\Rightarrow$ kumulovaná d.f. $\left[F^{(n)}(s) = \int_{-\infty}^{s} F^{(n-1)}(x)\,dx\right]$

NaP pro SSD: $X_F \succ_{FSD} X_G \Rightarrow X_F \succ_{SSD} X_G$ } Post.

$\min_F(x) \geq \max_G(x) \Rightarrow X_F \succ_{SSD} X_G$

$X_F \succ_{SSD} X_G \Rightarrow \mathbb{E}X_F \geq \mathbb{E}X_G$ (na 5. cvičení, via Per Partes)

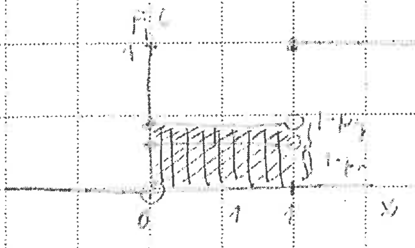
$\Rightarrow \min_x F(x) \geq \min_x G(x)$

Příklad 1: $X \sim Alt(p_X)$, $Y \sim Alt(p_Y)$ $\quad X = \begin{cases} 0, & 1-p_X \\ 1, & p_X \end{cases}$

? $X \succ_{SSD} Y$ $\quad [\Leftrightarrow F_X^{(2)}(t) \le F_Y^{(2)}(t)\ \forall t$ a ex. t_0 s ostrou$]$

$I^{(2)}(t) = F_Y^{(2)}(t) - F_X^{(2)}(t) \ge 0\ \forall t$ a $\exists t_0$ pro něž je nerov. ostrá

$F_X^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{t} F_{(x)}(x)\,dx$



$t \in (-\infty, 0)$: $I_2(t) = 0$

$t \in [0,1)$: $I_2(t) = t \cdot (1 - p_Y - (1 - p_X)) = t(p_X - p_Y)$

$t \in [1, \infty)$: $I_2(t) = p_X - p_Y$

$p_X - p_Y \ge 0$ + ostře $p_X > p_Y$

Příklad 2: Nechť $X = \begin{cases} 1, & p = 1/2 \\ 3, & p = 1/2 \end{cases}$ $\quad Y = \begin{cases} 0, & p = 1/2 \\ 4, & p = 1/2 \end{cases}$. Spočtěte EX, EY, var X, var Y.

Platí $X \succ_{SSD} Y$?

(1) $EX = 2$, $EY = 2$, $EX^2 = 5$, $EY^2 = 8$ $\Rightarrow$ var X = 1, var Y = 4

$\hookrightarrow$ var(X) $\le$ var(Y)

(2)

$I_2(t) \ge 0\ \forall t$, např. $I_2(1/2) = \frac{1}{4}$

(2A) $X \ldots x_1 \le \ldots \le x_T$, $Y \ldots y_1 \le \ldots \le y_T$ $\Big\} \Rightarrow X \succ_{SSD} Y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{t} x_i \ge \sum_{i=1}^{t} y_i \quad t = 1, 2, \ldots T$ a asp. 1× ostře.

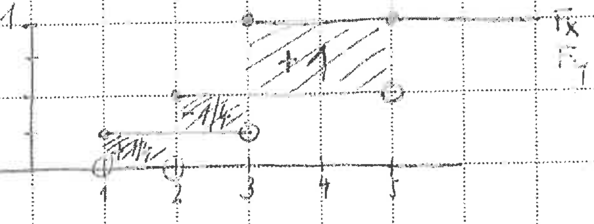
$t = 1$: $1 \ge 0$ ✓ ostře

$t = 2$: $4 \ge 4$ ✓ $\Big\}$ o.k.

Příklad 3: $X = \begin{cases} 1, & 1/4 \\ 3, & 3/4 \end{cases}$ $Y = \begin{cases} 2, & 1/2 \\ 5, & 1/2 \end{cases}$

Platí $X \succeq_{FSD} Y$? Platí $X \succeq_{SSD} Y$, nebo naopak?

↳ ? Platí pak $\text{var}\, Y \leq \text{var}\, X$?



(i) ? $X \succeq_{FSD} Y$? $F_X(x) \leq F_Y(x)$ $\forall x$ a $\exists x_0$ ostře. NE

NE, např. $x \in (1,2)$

(ii) $X \succeq_{SSD} Y$: $I_2(\lambda) = F_Y^{(2)}(\lambda) - F_X^{(2)}(\lambda) < 0$, $\lambda = 3/2$ NE

(iii) $Y \succeq_{SSD} X$: $I_2^*(\lambda) = F_X^{(2)}(\lambda) - F_Y^{(2)}(\lambda) \geq 0$ $\forall \lambda$ ANO

$EX = 5/2 \neq EY = 7/2$, $EX^2 = \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = 7$, $EY^2 = \frac{29}{2}$

$\text{var}\, X = 7 - \frac{25}{4} = 3/4 \nleq \text{var}\, Y = 5$ <u>NE!</u>

Příklad 4:

	A	B	C	PST
S1	1	0	5	1/3
S2	2	-1	0	1/3
S3	1	9	0	1/3

(i) Platí: $A \succ_{SSD} C$? $B \succ_{SSD} C$?

(ii) Existují LKK A a B, které dominují (SSD) C?

Pokud ano, která z nich má nejmenší rozptyl?

nejmenší var?

$\text{nejm}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ [illegible] — 11 —

(iii) Existují LKK B a C, dom. (SSD) A? Proč?

(iv) — 11 — A a C, B? Proč?

↳ [illegible]

	1	2	3	
A: 1 1 2	1	2	4	NE
(i) B: -1 0 9	-1	-1	8	
C: 0 0 5	0	0	5	NE

(ii) A, B (LK):

$\lambda + (-1)(1-\lambda) \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 1/2$

$2\lambda + (-1)(1-\lambda) \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 1/3$

$4\lambda + 8(1-\lambda) \geq 5 \Rightarrow \lambda \leq 3/4$

$\lambda \in [1/2, 3/4]$

$E(LKK) = \frac{1}{3} \cdot (-4\lambda + 8) \xrightarrow{MAX} \lambda = 1/2$

$\text{var}(LKK) = \frac{1}{3} \cdot (\lambda^2 + (3\lambda - 1)^2 + (-8\lambda + 9)^2) - \left(\frac{1}{3}(-4\lambda + 8)\right)^2 =$

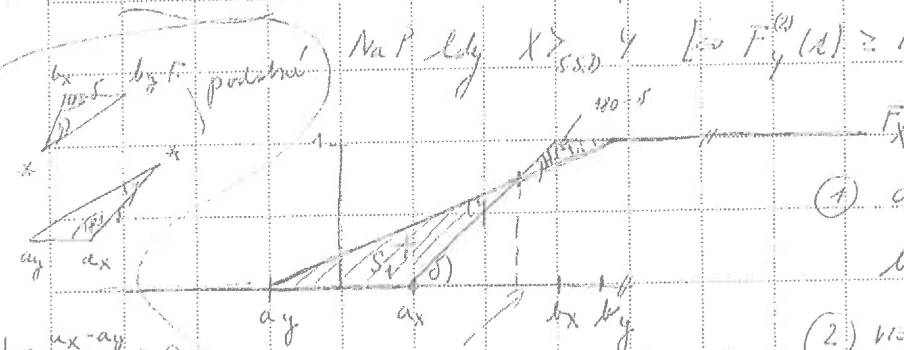
$= \frac{206\lambda^2 - 386\lambda + 182}{9}$

$\frac{\partial}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{386}{206 \cdot 2}$ gleb.

$\lambda = 3/4$

~ Příklad 5: rozd. $X \sim U(a_x, b_x)$ $Y \sim U(a_y, b_y)$

Na P. kdy $X \geq_{SSD} Y$ $[\Leftrightarrow F_Y^{(2)}(t) \geq F_X^{(2)}(t) \quad \forall t$ a $\exists t_0$ s ostr.$]$



$k = \frac{a_x - a_y}{b_y - b_x} \geq 0$

$S_1 = k^2 S_2$

$S_1 \geq S_2 \Rightarrow k^2 \geq 1$

(1) $a_y \leq a_x$, $b_y \leq b_x$ $\} \Rightarrow FSD \Rightarrow SSD$ aspoň jedna ostrá

(2) ne ostr.: $a_y \leq a_x$! NUTNÉ, $b_y \geq b_x$

$+ S_{\triangle a_y a_x *} \geq S_{\triangle * b_x b_y}$

$(P) = \frac{a_x(b_y - a_y) - a_y(b_x - a_x)}{(b_y - a_y) - (b_x - a_x)}$

$I_2(t) = \int_{-\infty}^{t} [F_Y(x) - F_X(x)]\, dx =$ $a_y \leq a_x$, $b_y \geq b_x$

LICH - D.

$t \leq a_y \ldots I_2(t) = 0$

$t \in [a_y, a_x] \ldots I_2(t) = \frac{(t - a_y)^2}{2(b_y - a_y)}$

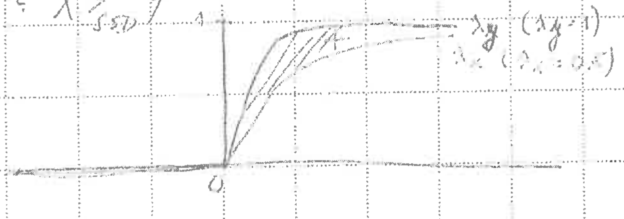
$t \in [b_y, \infty) \ldots I_2(t) = I_2(b_y)$

$t \in [a_x, (P)] \ldots I_2(t) = I_2(a_x) + \left[\frac{(t + a_x - 2a_y)\cdot(t - a_x)}{(b_y - a_y)\cdot 2} - \frac{(t - a_x)^2}{2(b_x - a_x)}\right]$ $F(x) = \begin{cases} 0, & (-\infty, a) \\ \frac{x-a}{b-a}, & [a, b) \\ 1, & [b, \infty) \end{cases}$

$t \in [(P), b_x] \ldots I_2(t) = I_2((P)) + \ldots$ $t \in [b_x, b_y] \ldots I_2(t)$

~ Příklad 6: $X \sim Exp(\lambda_x)$, $Y \sim Exp(\lambda_y)$ $F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

? $X \geq_{SSD} Y$



$\lambda_y > \lambda_x$ (stačí pro FSD)

$I_2(t) = \int_{-\infty}^{t} [F_Y(x) - F_X(x)]\, dx = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \int_0^t \exp(-\lambda_x x) - \exp(-\lambda_y x)\, dx, & \text{jinak} \end{cases}$ $(*)$

$(*) = \int_0^t [1 - \exp(-\lambda_y x) - 1 + \exp(-\lambda_x x)]\, dx = \left[\frac{\exp(-\lambda_y x)}{\lambda_y} - \frac{\exp(-\lambda_x x)}{\lambda_x}\right]_0^t =$

$= \frac{\lambda_x \exp(-\lambda_y t) - \lambda_y \exp(-\lambda_x t) + (\lambda_y - \lambda_x)}{\lambda_x \lambda_y} \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_y \geq \lambda_x$

~ Příklad 7: Nechť X a Y jsou dvě n.v. (nabývající hodnot na $[a,b]$, abs. spojité) s $EX = EY$. Je-li $X \geq_{SSD} Y \Rightarrow \operatorname{var} X \leq \operatorname{var} Y$.

Ukažte:

(1) $0 = EY - EX = \int_a^b x\cdot(f_Y(x) - f_X(x))\,dx \overset{P.P.}{=} \underbrace{\Big[x\cdot(F_Y(x) - F_X(x))\Big]_a^b}_{\text{pro } x=b:\ 1-1,\ x=a:\ 0-0} - \int_a^b 1\cdot(F_Y(x) - F_X(x))\,dx =$

$\Rightarrow \int_a^b (F_Y(x) - F_X(x))\,dx = 0$

(2) $\operatorname{var} Y - \operatorname{var} X \overset{EX=EY}{=} E(Y^2 - X^2) = \int_a^b x^2(f_Y(x) - f_X(x))\,dx \overset{P.P.}{=} \underbrace{\Big[x^2(F_Y(x) - F_X(x))\Big]_a^b}_{=0} - 2\cdot\int_a^b x(F_Y(x) - F_X(x))\,dx$

$\overset{P.P.}{=} -2\cdot\Big\{\underbrace{\Big[x\cdot\int_a^x (F_Y(t) - F_X(t))\,dt\Big]_a^b}_{\text{pro } x=a:\ 0,\ x=b:\ \text{z (1)}\ b\cdot 0} - \int_a^b \int_a^x (F_Y(t) - F_X(t))\,dt\,dx\Big\} =$

$= -2\cdot\Big\{0 - \int_a^b I_2(x)\,dx\Big\} = 2\cdot\int_a^b I_2(x)\,dx \geq 0$, neboť $I_2(x) \geq 0$

~ $X \geq_{FSD} Y \Rightarrow X \geq_{SSD} Y$