Teorie spotřebitele

$X = \{x \in R^n : x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n\}$ komoditní vektor

p, $p_i > 0$ - cena i-té komodity, I - budget > 0

(A1) $\prec$ je slabé uspořádání [tj. je asymetrické $x R y \Rightarrow y \bar{R} x\ (\forall x, y)$ a neg. tranzitivní, tj. $\bar{R}$ je tranzitivní: $x \bar{R} y$ a $y \bar{R} z \Rightarrow x \bar{R} z$] $\Rightarrow$ je tedy tranzitivní

(A2) $[x \leq y, x \neq y] \Rightarrow x \prec y \quad \forall x, y \in X$ ($x < y$)

(A3) $\prec$ je spojité a striktně konvexní [spojité: $P_y = \{x \mid x \in X, x \prec y\}$ a $P_y' = \{x \mid x \in X, x \succ y\}$ jsou otevřené $\forall y$; s.k.: $(x \leq y, \alpha \in (0,1)) \Rightarrow x \prec \alpha x + (1-\alpha) y$]

$\Rightarrow$ na X ex. spojitá striktně kvazikonkávní ord. u. fce u

$M(p, I) := \{x : x \in X : p^T x \leq I\} \xRightarrow{p_i > 0,\ I > 0} M(p,I)$ je kompaktní, neprázdná, omezená, uzavřená, konvexní

↑ tedy si můžu koupit při cenách p a důchodu I

dle (A3) $\Rightarrow \exists!\ \varphi(p, I)$ nejl. prvek při daných p, I z $M(p,I)$

↓ poptávková funkce

$$\max_{x \in M(p,I)} u(x) \longrightarrow \varphi(p, I) \qquad (*)$$

"nejlepší"

$$\left.\begin{array}{l} \min q^T x \\ \text{s.t. } x \succsim a \\ x \in X \end{array}\right\} \rightarrow \sigma(q, a) \qquad (**)$$

$\Rightarrow q^T x \leq q^T a$

Platí: $*\ \sigma(q,a) \sim a$, je spojitá v q, a; $*\ J(q,a) = q^T \sigma(q,a) > 0 \quad a \neq 0$

$*\ \frac{\partial J}{\partial q_j} = \sigma_j$, $*\ \sigma(p, \varphi(p,I)) = \varphi(p,I)$, $J(p, \varphi(p,I)) = I$

$*\ \varphi(q, J(q,a)) = \sigma(q,a)$, $*\ \Delta\sigma^T \Delta q \leq 0$, $\Delta\sigma = \sigma(q + \Delta q, a) - \sigma(q, a)$

$$(*) \xrightarrow{p^T \varphi(p,I) = I} \begin{array}{l} \max u(x) \\ p^T x = I \\ x \geq 0 \end{array} \qquad (**) \xrightarrow{\sigma(q,a) \sim a} \begin{array}{l} \min q^T x \\ \text{s.t. } u(x) = u(a) \\ x \geq 0 \end{array}$$

← náklady

Příklad 1: Řešte $\max u(x)$, s. t. $p^T x = I$, $x \geq 0$, pomocí Lagrangeových mult.

$$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda \cdot (I - p^T x).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i \overset{!}{=} 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p^T x \overset{!}{=} 0$$

$$(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{\lambda}) = (\varphi_i(p, I), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(p, I)) / p_i)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(p, I)) = \hat{\lambda} p_i$$

Dále známe $f(I) \equiv u(\varphi(p, I))$

$$\frac{d}{dI} f(I) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(p, I)) \cdot \frac{\partial \varphi_i(p, I)}{\partial I}$$

$$= \hat{\lambda} \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial \varphi_i(p, I)}{\partial I}.$$

Dále: $p^T \varphi(p, I) = I \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(p_i, I) = I$ / der. dle I

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \varphi(p_i, I)}{\partial I} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\lambda} = \frac{d}{dI} f(I) \; (> 0)$$

udává, jak citlivá je optimální hodnota $u(\varphi(p, I))$ na změnu důchodu

z předpokladů

$\downarrow$

s růstem I se zvětšuje opt. hodnota u

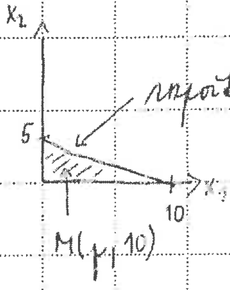
Analogicky pro (**).

Příklad 2: Cobb-Douglas $x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$

$$\max \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 = 10$$

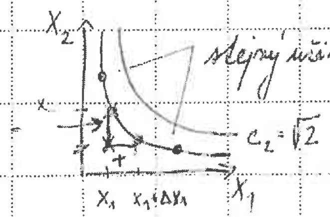
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



indiferenční křivky $\sqrt{x_1 x_2} = c_1$ ⇒ mapa

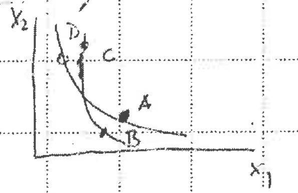
$$x_1 x_2 = c_1^2$$

$$x_2 = \frac{c_1^2}{x_1}, \quad c_1 = 1$$



* každý prvek (x_1, x_2) leží na nějaké IC

* nikdy neprotínají (≈ AX.)



$A \succ B$, $B \sim C$, $C \succ D$, $D \sim A$ ⇒ $A \succ D$ a $A \sim D$ X

- marginální užitek $MU_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\frac{1}{2}u}{x_1}$ ← nárůst/zhoršení užitku se zvýšení/snížení spotřeby statku x_1 [o 1 j x_1] ? jak se změní U

$$MU_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\frac{1}{2}u}{x_2}$$

poměr, kdy x_2 nahrazuje x_1 beze změny užitku

- marginální míra substituce $MRS_{x_1 x_2} = \frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = \frac{x_2}{x_1}$

tot. dif. U

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

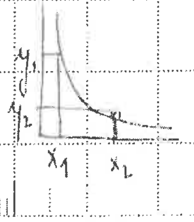
$$\underbrace{\frac{dU}{dx}}_{=0 \text{ ind. křivka}} = MU_x + MU_y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{MU_x}{MU_y} = -\frac{dy}{dx} \; [\cdot (-1)]$$

míra, při níž je spotřebitel ochoten přijmout 1 jednotku x_1 výměnou za $MRS_{x_1x_2}$ jedn. x_2

$MRS_{xy} = 2$ dá 2 jednotky Y za 1 jednotku X

[menšící MRS ⇔ U ... (předpoklad) ...]



$$u(x_1,y_1)^2 = u(x_2,y_2)^2 \leftarrow \text{jsou na ind. k.}$$

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0$$

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_1 y_2 - x_1 y_2 = 0$$

$$x_1 [y_1 - y_2] + y_2 [x_1 - x_2] = 0 \quad / : x_1 - x_2$$

když změně menší blíží se 0 ⇒

$$\sigma \cdot x_1 + y_2 = 0 \Rightarrow \sigma = -\frac{y_2}{x_1}$$

$$\sigma = -\frac{x_2}{x_1}$$

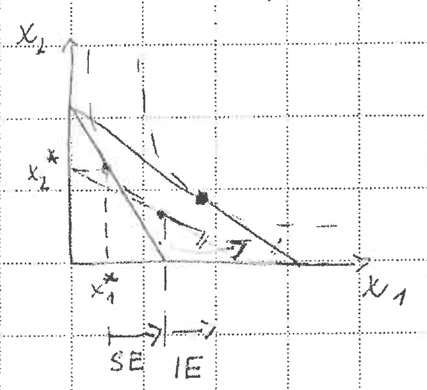
SKICÁŘ ARCHITEKTA
K129 KATEDRA ARCHITEKTURY FSv ČVUT

DATUM • JMÉNO • PODPIS

Substituční efekty – Dekompozice

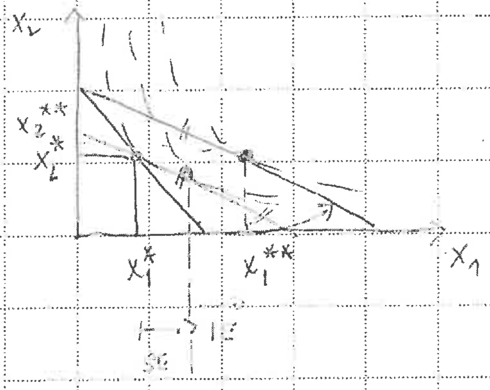
HICKS : SE = změna poptávky při konstantním užitku

IE = zbývající změna poptávky [s ohledem na úpravu I]



SLUTSKY : SE = změna poptávky při konstantním příjmu

IE = zbývající změna poptávky [s ohledem na úpravu I]



Sluckého věta: $\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j}(p,I) = \underbrace{-\varphi_j(p,I)\frac{\partial \varphi_i}{\partial I}(p,I)}_{\text{důchodový efekt}} + \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(p, v(p,I))}_{\text{substituční efekt}}$ ← ani chyba ve skupině [tam v]

$i, j = 1, \dots, n$

? jak se mění poptávka po jednotlivých komoditách, při $p_i \to p_i + \Delta p_i > 0$

Příklad: [Hicksův substituční efekt] → drží konstantní užitek
Sluck. drží konstantní kupní sílu

$\max \sqrt{x_1 x_2}$

s. t. $x_1 + 2x_2 = 10$, $x_1, x_2 \geq 0$

$L(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x_1 x_2} + \lambda(10 - x_1 - 2x_2)$

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$

$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{4x_2}$

$\frac{x_2}{10 - 2x_2} = \frac{10 - 2x_2}{4x_2}$

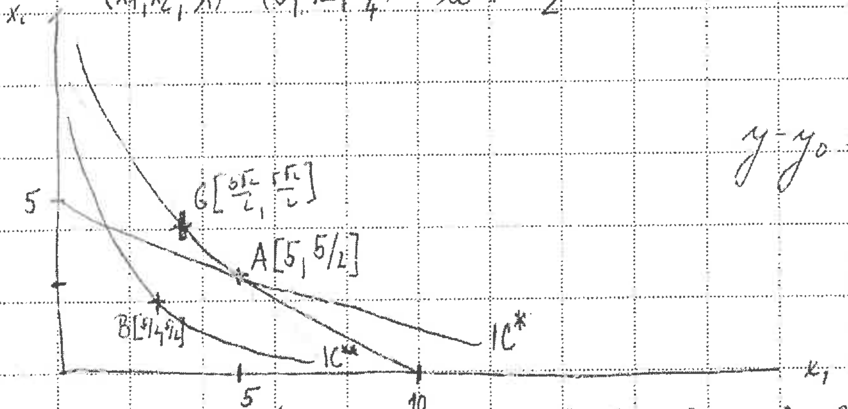
$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10 - 2x_2$

$4x_2^2 = 100 - 40x_2 + 4x_2^2$

$-40x_2 + 100 = 0$

$(x_1^*, x_2^*, \hat{\lambda}) = (5, 5/2, \frac{\sqrt{2}}{4})$ $u^* = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \frac{5}{2}$, $x_1 = 5$



$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

najdeme zdražení x_1 z $p_1 = 1 \to p_1^* = 2$ → $2x_1 + 2x_2 = 10$

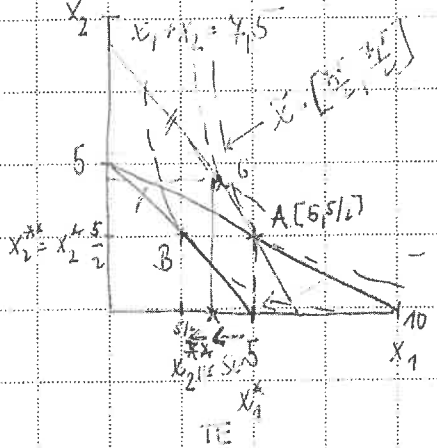
$A \to G$ je substituční efekt

$G \to B$ je důchodový efekt

identifikace bodu G: dotyk. bod $y = \frac{(5\sqrt{2}/2)^2}{x_1}$, který je rovnoběžný s $2x_1 + 2x_2 = 10$

$G\left[\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$

Př [Sluckého rozklad]



držíme konstantní kupní sílu

$$TE_1 = x_1(p_1', I) - x_1(p_1, I) = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}$$

$$SE_1 = x_1(p_1', I') - x_1(p_1, I) = \frac{7{,}5}{2} - 5 = -1{,}25$$

$$IE_1 = x_1(p_1', I) - x_1(p_1', I') = \frac{5}{2} - \frac{7{,}5}{2} = -1{,}25$$

analogicky pro $x_2^* \to x_2^{**}$ při $p_1 \to p_1'$

$$TE_2 = x_2(p_1', I) - x_2(p_1, I) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

$$SE_2 = x_2(p_1', I') - x_2(p_1, I) = \frac{7{,}5}{2} - \frac{5}{2} =$$

$$IE_2 = x_2(p_1', I) - x_2(p_1', I') = \frac{5}{2} - \frac{7{,}5}{2} =$$

Př: Číselné odvození SL: (I) $\max \sqrt{x_1 x_2}$

s.t. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$, $x \geq 0, y \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \lambda p_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{p_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{1}{p_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{p_1 x_1}{p_2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \Rightarrow I - p_1 x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2} x_1 = 0$$

$$I = 2 p_1 x_1 \Rightarrow x_1(p_1, p_2, I) = \frac{I}{2p_1}$$

$$x_2(p_1, p_2, I) = \frac{I}{2p_2}$$

$\boxed{c = 1, p = 1}$: $TE = -\frac{I}{2p_1^2}$ $\quad IE = -\frac{I}{(2p_1)} \cdot \frac{1}{2p_1} = \frac{-I}{4p_1^2}$ $\quad SE = TE - IE = \frac{-I}{4p_1^2}$

$$\underset{\sim}{TE} = \underset{\sim}{SE} + IE$$