TEORIE FIRMY

* firma = instituce, která zpracovává vstupní komodity $x_1,\dots,x_n$ a vyrábí $q_1,\dots,q_m$ výstupy

* $q = f(x_1,\dots,x_n)$ ← 1D případ, f je produkční funkce [def. $\mathbb{R}^n_+$ a $2\times$ dif.]

def. $x_1^0,\dots,x_n^0$ pevně dané ≥ 0 hodnoty a $x^{(i)} = (x_1^0,\dots,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)$

1. $(AP)_i = \dfrac{f(x^{(i)})}{x_i}$ produktivita vstupu i
2. $(MP)_i = \dfrac{\partial f(x^{(i)})}{\partial x_i}$ mezní produktivita vstupu i
3. $w_i = \dfrac{(MP)_i}{(AP)_i}$ výstupová elasticita vstupu i

As: $(MP)_i > 0$ [! zákon klesající mezní produktivity], tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} > 0$

As: f konkávní (či ryze kvazikonkávní)
+ Axiomy teor. spotřebitele } jednoznačnost

I $\max f(x)$ ← dle As. konvexní fg.
s.t. $r^T x \overset{\equiv}{\leq} C$ ← max. rozpočet $C>0$
$x \geq 0$
ceny vstupů

$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda(C - r^T x)$
↓ $\gamma(r,C)$ [$\exists!$]

II $\min r^T x$ ← dle As. konvexní fg.
s.t. $f(x) \overset{\equiv}{\geq} q_0$
$x \geq 0$ → $\xi(r,q_0)$ [$\exists!$]

$\tilde{L}(x,\mu) = r^T x + \mu(q_0 - f(x))$

~ $\gamma(r,C) = \xi(r,\hat{q})$, $\hat{q} = f(\gamma(r,C))$

a $\gamma(r,\hat{g}(r,q_0)) = \xi(r,q_0)$, kde $\hat{g}(r,q_0) = r^T \xi(r,q_0)$

III $\max Z(x) \equiv s f(x) - r^T x$ ← čistý zisk
fixní cena s.t. $x \geq 0$ → $\dfrac{\partial Z}{\partial x_i} = s\dfrac{\partial f}{\partial x_i} - r_i \overset{!}{=} 0$, $i = 1,\dots,n$

dle předchozích Lagr. fcí ⇒ $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = \dfrac{r_i}{r_j}$, $\mu = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{s}$

↳ optimální řešení úloh I, II, III leží na $k_{ij} = \dfrac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}}$, $i \neq j$ $\left[= \dfrac{r_i}{r_j}\right]$

křivka rovnají

odebereme 1 j. x_i, přidáme RTS_{ij} jedn. vstupů x_j, aby se produktivita nezměnila

nahrazování vstupů ij zachovává výstup ← $\dfrac{(MP)_i(x)}{(MP)_j(x)} = RTS_{ij}(x)$ míra technické substituce

SKICÁŘ ARCHITEKTA
K129 KATEDRA ARCHITEKTURY FSv ČVUT
DATUM • JMÉNO • PODPIS

tot. diferenciál* → vzroste-li RTS o 1%, poměr vstupů vzroste o σ_{ij} %

$$\varphi_{ij}(x) = \frac{x_j}{x_i} \longrightarrow \sigma_{ij}(x) = \left[\frac{d\varphi_{ji}(x)}{\varphi_{ji}(x)}\right] \Big/ \left[\frac{d\,RTS_{ij}(x)}{RTS_{ij}(x)}\right] \quad i \neq j.$$

elasticita substituce = míra, kterou měříme zaměnitelnost vstupů jako procentní změnu poměru vstupů při změně RTS

[∞ dokon. zaměnitelnost, 0 komplementy]

CES = constant elasticity of substitution – konstantní $\sigma_{ij}(x)$ $\forall i,j$

Def. $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ je homogenní stupně k, je-li $\varphi(tx_1,\dots,tx_n) = t^k\varphi(x_1,\dots,x_n)$ $\forall t>0$

Lem: $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ homogenní stupně k a diferencovatelná $\Rightarrow$ $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)$ je hom. st. k-1.

$$\varphi(tx_1,\dots,tx_n)=t^k\varphi(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow t\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(tx) = t^k\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

prod. fce homogenní stupně k $\Rightarrow$ t^k výstupní st.

st. 1 $\Rightarrow$ $MP_i(tx) = MP_i(x)$, nemění se ani $RTS_{ij}(x)$, AP_i, w_i

Lemma: φ je dif. a homogenní stupně k $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} = k\,\varphi(x)$

$$\varphi(tx) = t^k\varphi(x) \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial t} \text{ a } t=1$$

Příklad: [více nom. výstup] * F – 2x dif. a $F(q_1,\dots,q_m,x_1,\dots,x_n)=0$

* 1. a 2. parc. der. F jsou v řeš. této rce $\neq 0$
* $\frac{\partial F}{\partial q_i}(q,x)>0$ $\forall i=1,\dots m$
* $\frac{\partial F}{\partial x_j}(q,x)<0$ $\forall j=1,\dots n$

$$\left.\begin{aligned} \max\ \pi(q,x) &= \sum p_i q_i - \sum r_j x_j \\ \text{s.t. } F(q,x)&=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Lagrange}$$

*Totální diferenciál: def. Buď f je definována na okolí a. TD f v bodě a je lineární forma splňující $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{\|h\|}=0$

(V.) ∃-li diferenciál f v a $df(a)$ $\Rightarrow$ je f v a spojitá

(V.) Buď f je reálná fce n proměnných, $a\in\mathbb{R}^n$, věty parciální derivace jsou spojité v a $\Rightarrow$ f má v bodě a TD

$$L(h_1,\dots,h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n$$

SKICÁŘ ARCHITEKTA
K129 KATEDRA ARCHITEKTURY FSv ČVUT
DATUM • JMÉNO • PODPIS

Příklad: Cobb-Douglas: $f(x_1,\dots,x_n) = A\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$,

$A>0$ a $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$, $\alpha_i\in(0,1)$

(i) je též funkce CES, (ii) je homogenní st. 1, (iii) křivky rozvoje jsou polopřímky.

(i) $\varphi_{ji}(x) = \frac{x_j}{x_i}$ $\quad RTS_{ij}(x) = \frac{(MP)_i(x)}{(MP)_j(x)} = \frac{A\cdot\alpha_i\cdot x_i^{\alpha_i-1}\cdot x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\cdot x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}}{A\cdot\alpha_j\cdot x_j^{\alpha_j-1}\cdot x_1^{\alpha_1}\cdots x_{j-1}^{\alpha_{j-1}}x_{j+1}^{\alpha_{j+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}}$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = A\alpha_i\cdot x_i^{\alpha_i-1}\cdot x_1^{\alpha_1}\cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\, x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}$ $\quad = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\cdot\frac{x_j}{x_i}$

$d\,RTS_{ij}(x) = -\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\cdot x_j\cdot x_i^{-2}\cdot dx_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{1}{x_i}\cdot dx_j$

$$\left.\begin{aligned} d\,RTS_{ij}(x)/RTS_{ij} &= -\frac{dx_i}{x_i} + \frac{dx_j}{x_j} \\ d\,\varphi_{ji}(x)/\varphi_{ji}(x) &= -\frac{dx_i}{x_i} + \frac{dx_j}{x_j} \end{aligned}\right\}\ \sigma_{ij}(x) = 1 \qquad \boxtimes$$

(ii) $f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) = A(\lambda x_1)^{\alpha_1}\cdots(\lambda x_n)^{\alpha_n} = A\underbrace{\lambda^{\sum\alpha_i}}_{\lambda}\cdot x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} = \lambda\cdot f(x_1,\dots,x_n)$ $\boxtimes$

(iii) křivky rozvoje $k_{ij}\left[=\frac{p_i}{p_j}\right] = RTS_{ij}(x)$

$$\underbrace{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}}_{A_{ij}}\frac{x_j}{x_i} = k_{ij} \Rightarrow \frac{k_{ij}}{A_{ij}}\cdot x_i = x_j \qquad \boxtimes$$

SKICÁŘ ARCHITEKTA
K129 KATEDRA ARCHITEKTURY FSv ČVUT
DATUM • JMÉNO • PODPIS

<u>Příklad:</u> Produkční funkce ve tvaru $f(x_1,\dots,x_n) = A\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$, $A>0$, $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \in (0,1)$, $\rho \geq -1$

(i) Je CES a jaká je elasticita substituce koeficient? $[1/(1+\rho)]$

(ii) Lze CD převést na tuto funkci?

(i) $$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = A\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\right)(-\rho)\alpha_i x_i^{-\rho-1}\left(\sum_i \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1-\rho}{\rho}} = A\cdot \alpha_i\cdot x_i^{-\rho-1}\cdot\left(\sum_i \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1-\rho}{\rho}}$$

$$RTS_{ij}(x) = \frac{\alpha_i\cdot x_i^{-\rho-1}}{\alpha_j\cdot x_j^{-\rho-1}} \quad \left[=\frac{\alpha_i}{\alpha_j} x_i^{-\rho-1} x_j^{\rho+1}\right]$$

$$d\,RTS_{ij}(x) = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}(-\rho-1)x_i^{-\rho-2}\cdot x_j^{\rho+1}dx_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_j}(\rho+1)x_i^{-\rho-1}x_j^{\rho}dx_j$$
$$= \alpha_i/\alpha_j\cdot x_i^{-\rho-1}\cdot x_j^{\rho+1}\left[(-\rho-1)\cdot\frac{dx_i}{x_i} + (\rho+1)\frac{dx_j}{x_j}\right]$$

$$\varphi_{ji}(x) = \frac{x_j}{x_i}$$

$$\frac{d\varphi_{ji}(x)}{\varphi_{ji}} = -\frac{dx_i}{x_i} + \frac{dx_j}{x_j}$$

$$d\,RTS_{ij}(x)/RTS_{ij}(x) = (\rho+1)\cdot\left[-\frac{dx_i}{x_i} + \frac{dx_j}{x_j}\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij}(x) = \frac{1}{1+\rho}$$

(ii) $\rho \to 0$ (blíží) pak se jedná o CD

$$\ln\left(\frac{f(x)}{A}\right) = \frac{-\ln\left(\sum \alpha_i x_i^{-\rho}\right)}{\rho} = \frac{m(\rho)\to 0}{m(\rho)\to 0}\ \left[\begin{array}{l}\text{l'Hosp.}\\ \rho\to 0\end{array}\right] \frac{-\frac{1}{\sum \alpha_i x_i^{-\rho}}\cdot\left(\sum_i \alpha_i e^{-\rho\ln x_i}\cdot(-\ln x_i)\right)}{1}$$

$$\underset{\rho\to 0}{=} + \frac{\sum \alpha_i e^{-\rho\ln x_i}\cdot\ln x_i}{\sum \alpha_i e^{-\rho\ln x_i}} \underset{\rho\to 0}{=} \frac{\sum_i \alpha_i \ln x_i}{\underbrace{\sum \alpha_i}_{=1}} = \sum \alpha_i \ln x_i$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ln\left(\frac{f(x)}{A}\right) = \sum_i \alpha_i \ln x_i = \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \Longrightarrow f(x) \text{ je CD funkce}$$

(iii) $\rho \to 1$ ⇝ izokvanty jsou lineární [elasticita $\to \infty$]

(iv) $\rho \to \infty$ ⇝ elasticita je 0 [Leontiefova p. fce]

SKICÁŘ ARCHITEKTA
K129 KATEDRA ARCHITEKTURY FSv ČVUT

DATUM • JMÉNO • PODPIS

ad Příklad [Odvození CES]

(iv) $\rho \to \infty$

$$\ln\left(\frac{f(x)}{A}\right) = \frac{-\ln\left(\sum_i \alpha_i x_i^{-\rho}\right)}{\rho} = \frac{m(\rho)}{n(\rho)}$$

$\rho \to \infty$: $m(\rho) = +\infty$, $n(\rho) = +\infty$ $\to$ L'Hospital

$$m'(\rho) = -\frac{\sum_i \alpha_i x_i^{-\rho} \ln x_i}{\sum_i \alpha_i x_i^{-\rho}} \quad / \cdot \frac{\frac{1}{x_I^{-\rho}}}{\frac{1}{x_I^{-\rho}}} \text{ a limi}$$

nechť $x_I = \min(x_1, \dots, x_n)$ a $a_j = \frac{x_j}{x_I}$, $j = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow a_I = 1$, $a_j \geq 1$ $I \neq j$

$$\lim_{\rho \to \infty} m'(\rho) = -\lim_{\rho \to \infty} \frac{\sum_j \alpha_j \ln(x_j)\, a_j^{-\rho}}{\sum_j \alpha_j a_j^{-\rho}} = -\ln(x_I)$$

Rovněž $n'(\rho) = 1$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\rho \to \infty} \ln\left(\frac{f(x)}{A}\right) = -\ln(x_I)$

$$f(x) \xrightarrow[\rho \to \infty]{} \underline{\underline{A \min(x_1, \dots, x_n)}}$$

↳ Leontievova p. fce

? izokvanty: $\lfloor$

(v) ? homogenita: $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = A \cdot \left(\sum_i \alpha_i \lambda^{-\rho} x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} = \left[A\left(\sum_i \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{-1/\rho}\right]\lambda$

↳ homogenní stupně 1

IZOKVANTA – analogie indiferenčních křivek [* neprotínají se * pro každý vstup (x_1, x_2) $\exists$ izokvant]

IZOKOSTA – analogie rozpočtové meze

output exp. path [průsečíky IZOKV a IZOKOST]

faktor produktivity

Příklad $f(L,K) = A \cdot L^{\alpha} K^{1-\alpha}$ [US ekonomika $1{,}01 \cdot L^{0{,}75} \cdot K^{0{,}25}$]

lidská práce kapitálový vstup

$$\max f(L,K)$$
$$\text{s.t.} \quad p_L L + p_K K = C$$
$$L \geq 0, K \geq 0$$

(i) izokvanty

(ii) izokosty

(iii) křivka rozvoje