- Def 7.2: Fce $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ se nazývá **homogenní stupně** k, jestliže $\varphi(t\cdot x_1,\dots,t\cdot x_n)=t^k\cdot\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

- Lemma 7.1: $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)$ je homogenní stupně $k-1$.

→ důkaz:

$$\varphi(tx_1,\dots,tx_n)=t^k\cdot\varphi(x_1,\dots,x_n)\ \Big/\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(tx_1,\dots,tx_n)\cdot t=t^k\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)\ \Big/\ \frac{1}{t}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(tx_1,\dots,tx_n)=t^{k-1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)$$

□

- Př: Cobb-Douglesova produkční fce:

$f(x_1,\dots,x_n)=A\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$, kde $A>0$, $\alpha_i\in(0,1)\ \forall i$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ nemusí platit.

• Platí: CES (tj. konstantní elasticita substituce), homogenní stupně 1

důkaz: $A\cdot(x_1t)^{\alpha_1}\cdots(x_nt)^{\alpha_n}=t^{\sum\alpha_i=1}A\,x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}=t\,A\cdot x_1\cdots x_n$ □

- CES produkční fce lze vyjádřit ve tvaru:

$f(x_1,\dots,x_n)=A\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$, kde $A>0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, $\alpha_i\in(0,1)\ \forall i$

$\sigma_{ij}(x)=\frac{1}{1+\rho}\quad\forall i,j\in\{1,\dots,n\},\ i\neq j$

Zobecnění

- m výstupů: $q_1,\dots,q_m$ — výstup q_1 lze použít např. jako vstup k výstupu q_2

- výrobní proces $F(q_1,\dots,q_m,x_1,\dots,x_n)=0$, F je dvakrát diferencovatelná, první i druhé parciální derivace F jsou různé od 0 a $\frac{\partial F}{\partial q_i}(q,x)>0\ \forall i=1,\dots,m$ a $\frac{\partial F}{\partial x_j}(q,x)<0\ \forall j=1,\dots,n$

předpoklady

Úloha:

- $\max Z(q,x) = \sum_{i=1}^{m} s_i q_i - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$

za $F(q,x) = 0$

- řešení: Lagrangeova fce:

$L(q,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} s_i q_i - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j + \lambda F(q,x)$

→ podmínky optimality:

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = s_i + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial q_i} \stackrel{!}{=} 0 \qquad i = 1, \dots, m$

$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -r_j + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_j} \stackrel{!}{=} 0 \qquad j = 1, \dots, n$

$F(q,x) = 0$

- pouze lokální (ne globální) extrém

DYNAMICKÉ MODELY ROVNOVÁHY NABÍDKY A POPTÁVKY

- nabídka a poptávka: fce ceny, cena se zde mění
- Statický model: poptávka, nabídka
  - předp. a) $D(p)$, $S(p)$ jsou lineární fce ceny p
    b) p je konstantní v čase (M nereálný předp.)
  - $D(p) = \alpha + a \cdot p$, $S(p) = \beta + bp$
    ↳ klesající fce ceny ↳ rostoucí fce ceny

    $a < 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

    $D(p) \geq 0$, $S(p) \geq 0$
  - rovnovážná cena: $\bar{p}$: $D(\bar{p}) = S(\bar{p})$

když $p > \bar{p}$: výrobci vyrábí více, než co spotřebitelé nakoupí → pokles ceny

když $p < \bar{p}$: spotřebitelé poptávají více, než kolik zboží je dostupné → růst ceny

$\Rightarrow \bar{p} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}$

ceny ve dvou různých časech

cena známá v okamžiku zahájení výroby

- model I: (diskrétní čas)
  - diskrétní čas se mnoho produktů dostačující
  - předp. a) P není konstantní v čase
    b) nabídka v čase t je fce P_{t-1}
  - $D(P_t) = \alpha + aP_t = D_t \quad S = S(P_{t-1}) = \beta + b \cdot P_{t-1}$
  - "rovnovážná cena": $\alpha + a \cdot P_t = \beta + b \cdot P_{t-1} \quad \forall t$
    $\alpha + a \cdot \bar{P} = \beta + b \cdot \bar{P}$

$\Rightarrow P_t - \bar{P} = \frac{b}{a}(P_{t-1} - \bar{P})$ odečtením stran rovnic

cena nové dne s-1 z nabídky → a, b známé — diferenční rovnice

předp. známe $P_0 - \bar{P}$

$\rightarrow$ řešení: $P_t - \bar{P} = \left(\frac{b}{a}\right)^t \cdot (P_0 - \bar{P})$ → $D(P_t) = ?$ $S(P_{t-1}) = ?$

abs. hodnota, ptž $a<0$

- konvergence P_t?:
  je-li $\left|\frac{b}{a}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}(P_t - \bar{P}) = 0$

alternativně: diferenční rovnice ...

- model II: (spojitý čas)
  - předp. a) P není konstantní, P(t) je diferencovatelná
    b) D ~~nezávisí~~ závisí i na dynamice (změně) ceny v čase
  - $D(t) = \alpha + P(t) \cdot a + a_1 \cdot \frac{dP(t)}{dt}$; $a<0$, $a_1<0$ negativní reakce na změnu ceny

$S(t) = \beta + b \cdot P(t)$; $b>0$

- rovnováha: $D(t) = S(t)$
  $\alpha + a \cdot P(t) + a_1 \cdot \frac{dP(t)}{dt} = \beta + b \cdot P(t)$ (*)

konstantní v čase

- fce $P(t) = \bar{P}$ $\forall t \geq 0$ je řešením diferenciální rovnice, s počáteční podmínkou $P(0) = \bar{P}$ $\Rightarrow \alpha + a \cdot \bar{P}(t) + a_1 \cdot \frac{d\bar{P}(t)}{dt} = \beta + b \cdot \bar{P}(t)$ (**)
- def. $p(t) = P(t) - \bar{P}$ $\forall t \geq 0$

$\rightarrow a \cdot p(t) + a_1 \frac{dp(t)}{dt} = b \cdot p(t)$ odečtením (*) a (**)

$\rightarrow \frac{dp(t)}{dt} + \frac{a-b}{a_1} \cdot p(t) = 0$

chybí zbytek

$p(t) = c \cdot e^{\left(\frac{b-d}{a_1} \cdot t\right)}$; $p(0) = P(0) - \overline{P}$

$p(t) = (P(0) - \overline{P}) \cdot e^{\left(\frac{b-d}{a_1} \cdot t\right)}$

- konvergence $t \to \infty$: $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} P(t) = \overline{P}$
- kdyby $a_1 > 0 \Rightarrow$ divergence $p(t)$ (při zvýšené ceny spotřebitel nesníží svou poptávku kolik, kolik by se očekávalo)

- model IV: (spojitý čas)
- předp. a) P není konstantní

  b) $Q(t)$ ... stav zásob v čase t: $\frac{dQ(t)}{dt} = S(t) - D(t)$

$S(t) > D(t)$ ... vyjrobeno „na sklad"
$S(t) < D(t)$ ... stav zásob se zmenšuje

- $D(t) = \alpha + a \cdot P(t)$, $S(t) = \beta + b \cdot P(t)$; $a < 0, b > 0$

  $Q(t) = Q_0 + \int_0^t (S(\tau) - D(\tau))\, d\tau$

c) $\boxed{\frac{dP(t)}{dt} = -\lambda \cdot \frac{dQ(t)}{dt}}$, kde $\lambda > 0$

- $\frac{dP(t)}{dt} = -\lambda (S(t) - D(t)) = -\lambda \cdot (\beta + b \cdot P(t) - \alpha - a \cdot P(t))$ $(\square)$

konstantní v čase

- pozorování: $\overline{P}(t) = \overline{P}$ $\forall t \geq 0$ je řešením diferenciální rovnice $\Rightarrow \frac{d\overline{P}(t)}{dt} = \underbrace{-\lambda \cdot (\beta + b \cdot \overline{P}(t) - \alpha - a \cdot \overline{P}(t))}_{0} = 0$ $(\square\square)$

- def. $p(t) = P(t) - \overline{P}$ a odečteme rovnice $(\square)$ a $(\square\square)$

  $\frac{dp(t)}{dt} = -\lambda \cdot (b - a) \cdot p(t)$

$\rightarrow$ řešení $p(t) = c \cdot e^{-\lambda(b-a)t}$, poč. podmínka $p(0) = P(0) - \overline{P}$ (známé)

$\Rightarrow p(t) = (P(0) - \overline{P}) \cdot e^{-\lambda(b-a)t}$

- konvergence: $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} P(t) = \overline{P}$