# ROVNOVÁHA MEZIODVĚTVOVÝCH VZTAHŮ

## LEONTJEVŮV MODEL

- $n$ výrobků z $n$ odvětví, předp. každé odvětví produkuje právě jeden výrobek.
- spotřeba výrobků z jiných odvětví
- uspokojení vnější (exogenní) poptávky
- výrobky $i = 1, \dots, n$ (tj. $i$ odvětví)

množství (jednotek) výrobků $x_i$ ; $i = 1, \dots, n$

množství (jednotek) výrobků $i$ pro výrobu (jednotky) výrobku $j$ $a_{ij} \geq 0$

exogenní poptávka po $i$-tém výrobku $c_i$ (= čistá produkce)

- modelem: $c_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ ; $i = 1, \dots, n$ , $x_j \geq 0 \ \forall j = 1, \dots, n$

exogenní poptávka … výroba … potřebuje se k výrobě v jiných odvětvích

- označení: $E$ … jednotková matice

$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ … technologická matice (nezáporná čtvercová matice)

→ model: $(E - A)x = c$ , $x \geq 0$ : pokud ∃ řešení - soustava je produktivní

- řešitelnost?
  - modifikace (zobecnění): $[(\overbrace{\rho E - A}^{D})x = c, \ x \geq 0]$ → řešitelnost pro $\rho = 1$
  - obecně (přeformulace): $[Dx = c, \ x \geq 0 \ ; \ d_{ij} \leq 0 \ \forall i \neq j, \ i,j = 1, \dots, n]$ (*)

- **Věta 9.1**: Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1) Soustava $Dx = c, \ x \geq 0 \ ; \ d_{ij} \leq 0 \ \forall i \neq j$ je řešitelná pro (nějaké) $c_i > 0$ , $i = 1, \dots, n$.

2) ——— || ——— je řešitelná pro $\forall c_i \geq 0$ , $i = 1, \dots, n$.

3) $\Delta_k = \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \vdots & & \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix}$ , $k = 1, \dots, n$ ; pak $\Delta_k > 0 \ \forall k = 1, \dots, n$

hlavní subdeterminant

podmínka řešitelnosti

neuvažujeme, že prodejní cena je často vyšší než nákupní cena

# DUÁLNÍ LEONTJEVŮV MODEL

- $p^T = (p_1, \dots, p_n)$ ... ceny (prodej, nákup)

  $p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i = v_j$ ... nadhodnota (= zisk) ; $v_j \geq 0$

  $p_j$ prodáme jednotku výrobku $j$ - tržba; $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i$ celkové náklady, které máme k výrobě jednotky výrobku $j$

- $p_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_j = v_j$ ; $j = 1, \dots, n$ dané, známe → hledáme $p_j$, aby soustava měla řešení (ne naopak!)

  $p_i \geq 0$ ; $i = 1, \dots, n$

→ když ∃ řešení: soustava je __ziskutvorná__

- __Věta:__ Soustava je produktivní ⟺ soustava je ziskutvorná.

→ úloha lze přepsat a zobecnit: $[(\rho E - A)^T p = v, p \geq 0]$ (*D) duální úloha k (*)

→ $[Dp = v, p \geq 0]$ (*D), kde $d_{ij} \leq 0$ $\forall i \neq j$ ; $i, j = 1, \dots, n$

pokud není splněná, tak nevíme nic

- Postačující podmínka (Brower-Sollow):
  Uvažujme soustavu $c_i = \rho x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$ $\forall i$, $x_j \geq 0$ $\forall j$ a nechť $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ $\forall i, j$. Pak postačující podmínkou produktivnosti soustavy (*) je $\rho > r_i$ $\forall i = 1, \dots, n$.
  Postačující podmínkou ziskutvornosti soustavy (*D) je $\rho > s_j$ $\forall j = 1, \dots, n$.

- __Def:__ Matice $D$ je __nezáporně invertibilní__, jestliže:
  i) $D$ je regulární
  ii) prvky $D^{-1}$ jsou nezáporné.

- Nutná a postačující podmínka - __Věta 93__:
  Soustava (*) je produktivní, resp. (*D) je ziskutvorná ⟺ $D$ je nezáporně invertibilní.
  $D = (\rho E - A)$

u nás $= 1$

u nás $a_{ij} \geq 0$ ✓ OK

- <u>Věta 9.4:</u> Nechť $A$ je nezáporná čtvercová matice řádu $n$ a $\rho > 0$. Pak a) je-li matice $(\rho E - A)$ nezáporně invertibilní, je $(\rho E - A)^{-1} = \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r}{\rho^r}$.

b) je-li řada $\frac{1}{\rho} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r}{\rho^r}$ konvergentní, potom matice $(\rho E - A)$ je nezáporně invertibilní a platí, že $(\rho E - A)^{-1} = \frac{1}{\rho} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r}{\rho^r}$.

výpočetně může být výhodnější - jen ověřit konvergenci

- Spektrální vlastnosti:
  - <u>Lemma 9.2:</u> Nechť $\pi(A) = \{\rho : (\rho E - A)$ je nezáporně invertibilní$\}$, pak $\pi(A) = (\lambda, \infty)$, kde $\lambda \geq 0$.
  - <u>Lemma 9.3:</u> Nechť $\lambda = \inf \pi(A)$. Potom $\exists\, \tilde{x} \geq 0, \tilde{x} \neq 0$ takový, že $A\tilde{x} = \lambda \cdot \tilde{x}$.
  - <u>Věta 9.5:</u> „Perron-Frobenius"

    Nechť $A$ je nezáporná čtvercová matice řádu $n$ a nechť $\lambda = \inf \pi(A)$. Potom

    i) $\lambda$ je největší nezáporné vlastní číslo matice $A$; číslu $\lambda$ odpovídá nějaký nezáporný vlastní vektor; matice $(\rho E - A)$ je nezáporně invertibilní $\Leftrightarrow \rho > \lambda$.

    ii) Nechť $y \geq 0, y \neq 0, \mu \geq 0$ a nechť $Ay \geq \mu y$, potom $\mu \leq \lambda$

    iii) Nechť $\omega$ je libovolné vlastní číslo matice $A$, potom $|\omega| \leq \lambda$.
  - <u>Důsledek pro $\rho = 1$:</u> $\lambda < 1$ je nutnou a postačující podmínkou pro produktivitu, resp. ziskovost, kde $\lambda = \inf \pi(A)$, $\lambda$ je největší vlastní číslo. $\lambda \geq 0$