Věta (Prékopa, 1971): Nechť $g_i(x,y)$, $i=1,\dots,m$ jsou konkávní na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$. Nechť ω má log-konkávní rozdělení na $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}^l)$. Pak funkce $h(x) = P\{g_i(x,\omega) \ge 0,\ i=1,\dots,m\}$ je log-konkávní funkce na $\mathbb{R}^n$.

• Důkaz: $H(x) := \{y : g_i(x,y) \ge 0\ \forall i\}$

$L := \{x : H(x) \neq \emptyset\}$

1, chceme ukázat, že L je konvexní.

Vezmime $x_1 \in L$, $x_2 \in L$, $\lambda \in (0,1)$. $\exists y_1 : g_i(x_1,y_1) \ge 0\ \forall i$ $\exists y_2 : g_i(x_2,y_2) \ge 0\ \forall i$

$g_i((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 ; (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \ge (1-\lambda) g_i(x_1,y_1) + \lambda g_i(x_2,y_2) \ge 0.$

$\Rightarrow$ pro $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ existuje $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$ takové, že $g_i(\cdot,\cdot) \ge 0$ $\Rightarrow$ L je konvexní.

2, $H((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \supset (1-\lambda)H(x_1) + \lambda H(x_2)$

$\underbrace{P(H((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2))}_{h((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)} \ge P((1-\lambda)H(x_1) + \lambda H(x_2))$

P je log-konkávní

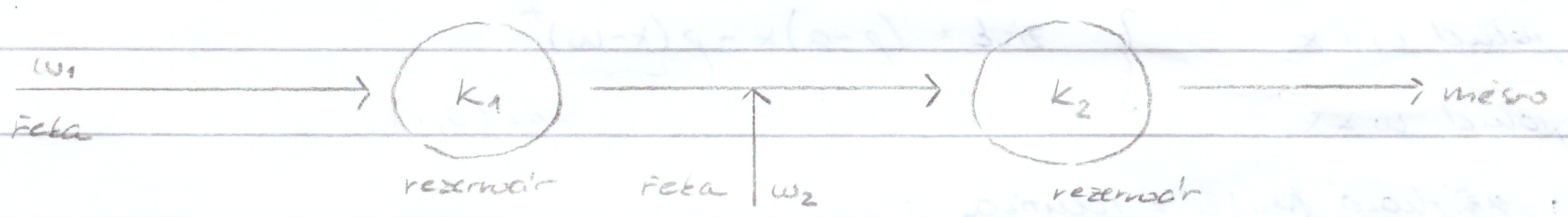
$h((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \ge P((1-\lambda)H(x_1) + \lambda H(x_2)) \ (\ge) \ P(H(x_1))^{1-\lambda} P(H(x_2))^{\lambda} = h(x_1)^{1-\lambda} h(x_2)^{\lambda}$.

$\Rightarrow$ h je log-konkávní funkce. □

Důsledek: Nechť $g_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou konkávní a nechť ω má log-konkávní rozdělení na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Nechť X je konvexní. Pak množina $\mathcal{X}(\alpha) = X \cap \{x : P(g_i(x) \ge \omega_i,\ i=1,\dots,m) \ge \alpha\}$ je konvexní.

• Důkaz: speciální případ předchozí věty $g_i(x,y) = g_i(x) - y_i$ (náhoda v separované straně). □

Příklad: vodohospodářství v Maďarsku



ukažme pouze jedno období a na začátku jsou rezervoáry prázdné

chceme: $\omega_2 + \omega_1 - \min(\omega_1, k_1) \le k_2$ aby do města nepřišla povodeň

náklady na výstavbu $c(k_1, k_2)$

úloha: $\min c(k_1,k_2)$

$P(\omega_2 + \omega_1 - \min(\omega_1,k_1) \le k_2) \ge \alpha$

$0 \le k_1 \le L_1$

$0 \le k_2 \le L_2$

$P(g(\omega,k) \ge 0) \ge \alpha$: $g(\omega,k) = k_2 - \omega_2 - \omega_1 + \min(\omega_1, k_1)$.

stačí předpokládat log-konkávní rozdělení a máme konvexní množinu přípustných řešení. Maďaři nakonec použili mnohorozměrné Γ rozdělení.