$F_i(g_i(\hat{x})) \geq F_i((1-\lambda)g_i(x_1)+\lambda g_i(x_2)) \geq F_i(\min\{g_i(x_1), g_i(x_2)\}) \geq \alpha_i$

monotonie F_i

$\Rightarrow \hat{x} \in \mathcal{X}_i(\alpha_i)$

- Dále: $F_i((1-\lambda)g_i(x_1)+\lambda g_i(x_2)) \geq \min\{F_i(g_i(x_1)), F_i(g_i(x_2))\}$

obecně, bez předpokladů věty, je nutné ověřit tuto podmínku: kvazikonkávnost funkce g_i:

$g_i(\hat{x}) \geq \min\{g_i(x_1), g_i(x_2)\}$.

(2) SDRUŽENÉ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ OMEZENÍ

Kvazikonkávnost: $F((1-\lambda)g(x_1)+\lambda g(x_2)) \geq \min F(g(x_1), g(x_2))$

Obecně je zapotřebí pro konvexitu sdružených pravděpodobnostních omezení kvazikonkávnost, ale my se omezíme pouze na speciální případ, který zaručuje logaritmická konkávnost.

Definice: nechť P je pravděpodobnostní míra na prostoru $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}^l)$. Řekneme, že P je log-konkávní $\Leftrightarrow$ pro libovolné dvě konvexní množiny $A, B \in \mathcal{B}^l$ a $\lambda \in (0,1)$ platí $P((1-\lambda)A+\lambda B) \geq P(A)^{1-\lambda} \cdot P(B)^{\lambda}$.
Funkce $h: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ je log-konkávní $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^l$ $h((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \geq h(x_1)^{1-\lambda} h(x_2)^{\lambda}$

Věta: nechť P je log-konkávní pravd. míra na $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}^l)$ absolutně spojitá s hustotou p. Nechť D je konvexní, $D \in \mathcal{B}^l$. Pak $h(x) = P(D+x) = \int_{D+x} p(z)\,dz$ je log-konkávní funkce $\forall x \in \mathbb{R}^l$.

• Důkaz: $\hat{x} = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$

$h(\hat{x}) = P(D+\hat{x}) = P[(1-\lambda)(D+x_1)+\lambda(D+x_2)] \geq P(D+x_1)^{1-\lambda} \cdot P(D+x_2)^{\lambda} = h(x_1)^{1-\lambda} h(x_2)^{\lambda}$. □

pozn: pro důkaz nebyla potřeba existence hustoty p; hustota p je potřeba pro následující důsledek: distribuční funkce log-konkávního rozdělení je log-konkávní funkce a hustota log-konkávního rozdělení je log-konkávní funkce.

Příklady log-konkávních rozdělení:

• mnohorozměrné normální rozdělení

plyne z věty: nechť $p(x) = \mu e^{-Q(x)}$, kde $Q: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce, je hustota pak odpovídající rozdělení je log-konkávní

• beta rozdělení, gamma rozdělení, Dirichletovo rozdělení, Wishartovo rozdělení, rovnoměrné rozdělení na konvexní množině